ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Світлана Скворцова
Оксана Онопрієнко

Інтернет-підтримка

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА:

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У 3–4 КЛАСАХ

ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ НА ЗАСАДАХ ІНТЕГРАТИВНОГО І КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДІВ

Світлана Скворцова
Оксана Онопрієнко

Інтернет-підтримка

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА:

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У 3-4 КЛАСАХ

ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ НА ЗАСАДАХ ІНТЕГРАТИВНОГО І КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДІВ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2020

УДК 51:373.3(07)
С42

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист Міністерства освіти і науки України від 13.10.2020 № 1/11-7033)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Рецензенти:

Н. П. Листопад, науковий співробітник відділу початкової освіти Інституту педагогіки НАПН України;
О. Б. Колесник, учитель початкових класів Харківської гімназії № 12 Харківської міської ради Харківської області, учитель-методист

Скворцова С. О.

С42 Нова українська школа: методика навчання математики у 3–4 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів : навч.-метод. посіб. / С. О. Скворцова, О. В. Онопрієнко. — Харків : Вид-во «Ранок», 2020. — 320 с.

ISBN 978-617-09-6795-4

У посібнику подано методику навчання учнів 3 і 4 класів основних питань курсу математики: арифметичних дій додавання і віднімання багатоцифрових чисел; табличного й позатабличного множення і ділення; навчання розв'язування простих і складених задач; вивчення величин та їх одиниць; алгебраїчної та геометричної пропедевтики.

У посібнику реалізовано науково-методичні напрацювання авторів, ураховано сучасні дослідження про психофізіологічні особливості дітей цифрового покоління.

Призначено для вчителів початкових класів закладів загальної середньої освіти.

УДК 51:373.3(07)

Інтернет-підтримка

ISBN 978-617-09-6795-4

ПЕРЕДМОВА

Навчання математики в 3 і 4 класах здійснюється за вимогами другого циклу навчання Державного стандарту початкової освіти [1] та на основі відповідних вимог типових освітніх програм [2]. Метою навчання математики постає різнобічний розвиток особистості дитини та її світоглядних орієнтацій засобами математичної діяльності; формування математичної і ключових компетентностей, необхідних дитині для життя та продовження навчання. Досягнення мети навчання математики в другому циклі початкової школи забезпечується виконанням таких завдань:

- формування в учнів розуміння ролі математики в пізнанні явищ і закономірностей навколишнього світу;
- формування досвіду використання математичних знань та способів дій для розв'язування навчальних і практичних задач;
- розвиток математичного мовлення учнів, необхідного для опису математичних фактів, відношень і закономірностей;
- формування в учнів здатності логічно міркувати, оцінювати коректність і достатність даних для розв'язування навчальних і практичних задач.

Реалізація зазначених мети і завдань виявляється в досягненні учнями очікуваних результатів навчання, які в типових освітніх програмах [2] систематизовані за змістовими лініями, що охоплюють вивчення натуральних чисел і величин, дій із числами і величинами; розв'язування математичних та алгебраїчних виразів, рівностей і нерівностей; вивчення геометричних фігур; роботу з даними; розв'язування математичних задач і виконання навчальних досліджень.

Зміст навчання математики в другому циклі початкової освіти розгортається так само, як і в першому циклі, концентрично, і передбачає формування й розвиток в учнів:

- розуміння нумерації цілих невід'ємних чисел у межах мільйона; формування навичок виконання арифметичних дій додавання і віднімання, множення і ділення; дій на практичній основі зі звичайними дробами; вимірювання величин; оперування величинами;
- уявлень про математичні вирази: числові та зі змінною; про залежність результату арифметичної дії від зміни одного з її компонентів (на пропедевтичному рівні);

- просторових уявлень; здатності розрізняти геометричні фігури за їхніми істотними ознаками; практичних умінь будувати, моделювати й конструювати та креслити геометричні фігури від руки та за допомогою простих креслярських інструментів (на пропедевтичному рівні);
- дій на практичному рівні з найпростішими способами виділення і впорядкування даних за певною ознакою;
- здатності розпізнавати практичні проблеми, що розв'язуються із застосуванням математичних методів на матеріалі сюжетних, геометричних і практичних задач, а також у процесі виконання найпростіших навчальних досліджень.

Окреслені завдання і змістові домінанти досягаються завдяки реалізації в освітньому процесі систем навчальних впливів — методик навчання предмета.

У дидактиці початкового навчання обґрунтована закономірність, яка є ключовою для розроблення змісту цього посібника: система педагогічного впливу методики навчання може бути ефективною, якщо спиратиметься на дані педагогічної і вікової психології, а також фізіології вищої нервової діяльності. Це положення особливо актуальне в чинній ситуації розвитку дитинства, характерною рисою якої є помічена в сучасних дітей зміна домінувальних типів перцепції, опрацювання і відтворення інформації. Отже, сучасні методики навчання в початковій школі неодмінно мають ураховувати останні дані психолого-фізіологічних досліджень когнітивних процесів і поведінкових реакцій учнів молодшого шкільного віку, у яких відзначені такі суттєві для освітнього процесу особливості: зниження об'єму слухової пам'яті, переважання двовимірного сприймання, уповільнення розвитку децентрації, погіршення аналітико-синтетичної діяльності й пам'яті, розосередженість уваги, багатозадачність, схильність до заміни розв'язування задачі перебором варіантів, кліповість мислення тощо. Це дозволить передбачити дидактичні засоби і форми організації навчальної діяльності, які полегшать процеси сприймання, усвідомлення і засвоєння навчального матеріалу.

Важливою функцією сучасних методик навчання математики є реалізація потенціалу предмета щодо впливу на розвиток у дітей критичного мислення, уміння логічно доводити свою думку, обґрунтовувати свою позицію, що актуально для становлення молодшого школяра як особистості, його самовизначення, досягнення ним ситуації успіху. Ця проблема вирішується шляхом побудови системи навчальних завдань і передбачених завданнями низок операцій, що є компонентами технології розвитку критичного мислення.

Сутність результативних складників початкового навчання математики свідчить про їхній діяльнісно-дослідницький характер. Переважна більшість цих результатів пов'язана із застосуванням учнями розумових операцій і дій у частково змінених навчальних або буденних обставинах. З метою забезпечення реалізації цього аспекту освіти в педагогіці використовується проєктна діяльність як один з ефективних засобів формування ключових компетентностей, розвитку в учнів важливих навчальних та особистісних якостей. Передбачена методикою навчання системна участь дітей у навчальних проєктах дозволить природним чином пов'язати зміст навчання з їхнім буттям, продуктивно ввести навчальні надбання в життєвий досвід.

РОЗДІЛ 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ І МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В 3–4 КЛАСАХ

1.1. СУЧАСНІ УЧНІ ПОЧАТКОВОЇ ШКОЛИ — ДІТИ ЦИФРОВОГО ПОКОЛІННЯ

Ознакою сучасних методичних систем, що забезпечують досягнення обов'язкових та очікуваних результатів навчання математики, є опора на науково обґрунтовані теоретичні засади й, обов'язково, на врахування особливостей сучасних учнів — дітей цифрового покоління.

Істотною ознакою сучасного світу є його інформаційна насиченість, легкий доступ до будь-якої інформації. Для сучасних дітей пошук інформації не є складним — вони змалку звикли до ґаджетів, до пошуку мультфільмів, відеоігор у мережі Інтернет. Вони краще за дорослих, проте навмання, розбираються з електронними пристроями, які замінюють дітям іграшки, спілкування з однолітками й дорослими, рухливі та сюжетні ігри. Нині склалася ситуація, коли дозвіл батьків погратися з ґаджетом є найбільш дієвим мотивом діяльності дитини, а заборона — найгіршим покаранням.

Саме такі учні вже зараз навчаються в початковій школі. Ці діти не уявляють свого життя без ґаджетів, підключених до мережі Інтернет. Такі пристрої, з одного боку, дають можливість швидкого пошуку інформації, а з іншого — вимагають уміння з цією інформацією працювати. Це спонукає шкільну освіту переорієнтовуватись із надання учням знань у готовому вигляді й формування на їх основі вмінь та навичок на навчання працювати з інформацією — сприймати, логічно опрацьовувати, організовувати діяльність із запам'ятовування. Тому на перший план виходить завдання розвитку пізнавальних процесів, які забезпечують опрацювання й запам'ятовування здобутої інформації, а потім і застосування одержаних знань.

Нейрофізіологи встановили, що, з одного боку, ґаджети дійсно надають швидкий доступ до інформації, що вимагає певного рівня розвитку пізнавальних процесів школярів для її опрацювання, проте з іншого — негативно впливають на якість пам'яті, уваги, оброблення інформації в представників цифрового покоління, у яких пізнавальні процеси є гіршими у порівнянні з попередніми поколіннями [3; 6].

Особливістю учнів цифрового покоління є, з одного боку, перенасиченість інформацією, а з іншого — постійна потреба в новій інформації, яку, на жаль, вони не намагаються ані аналізувати, ані запам'ятовувати. Швидке гортання електронних сторінок (інтернет-серфінг), несприйняття великих текстів, вихоплювання з тексту його перших, середніх і кінцевих рядків, бажання швидко, поверхово з'ясувати основну ідею, не намагаючись вдатися до логічного опрацювання тексту, швидке перемикання з одного джерела інформації на інше негативно впливають на якість уваги й оброблення інформації, оскільки дитина не звикає зосереджуватися й глибоко аналізувати інформацію.

Основою всіх пізнавальних (когнітивних) процесів є мозок людини. Закордонні нейрофізіологи встановили, що планшети, смартфони і приставки — це форма цифрового наркотика, який впливає на кору головного мозку, що відповідає за виконавче функціонування, підвищуючи рівень дофаміну — нейромедіатора, що забезпечує відчуття задоволення і є найбільш залученим у динаміку адиктивності.

Сучасна дитина одночасно перебуває й у віртуальному, і в реальному світах, у кожному з яких встановлені певні правила існування. Віртуальний світ діє подібно до реального — життя в ньому вимагає прискореного формування тих здібностей, які допомагають легше виживати в його середовищі. Світ електронних ґаджетів, у який діти занурилися ще змалку, перенасичений яскравими образами, дії в цьому світі приносять виключно задоволення і не вимагають вольових зусиль, адже в більшості дитячих ігор є можливість перейти на легший рівень виконання або звернутися по допомогу. У реальному світі, зокрема в школі, не можна перейти на легший рівень, тут фарби тьмяніші, завдання нудніші, а вчителька не є феєю [4]. Відсутність звички змушувати себе робити щось, що не приносить задоволення, разом з особливостями батьківського виховання поступово формують нездатність відкладати задоволення, що негативно впливає на формування вольових якостей і на здатність досягати успіху.

Електронні сторінки, відеоігри, мультфільми пропонують дітям яскраву динамічну картинку, спецефекти. Мозок дітей звикає до високих рівнів стимуляції, які не може забезпечити традиційне навчання, тому воно видається учням нудним і нецікавим. Але й замінювати навчання відеоуроками, відеоіграми, що можуть бути цікавішими за звичайне мовлення вчителя, не можна. Навіть споглядаючи яскраву й динамічну картинку відеоуроку, без виконання власних дій школяр не виявляє активності з предмета вивчення, а тому якість навчальної діяльності є досить низькою. Інформація з електронних сторінок так і залишається інформацією, яка міститься на зовнішньому носії і не перетворюється у власне надбання особистості. Для того щоб інформація стала знанням — особистісним здобутком людини, треба здійснити спеціальну роботу з її аналізу та запам'ятовування, а для цього потрібно докласти певних вольових зусиль, щоб зосередитися на предметі вивчення. Навчання є складною роботою учнів, у процесі якої формуються нові нейронні зв'язки в мозку, і чим більше їх утвориться, тим кращою буде якість розумової діяльності людини. Мозок розвивається лише під час опрацювання нової, складної і нестандартної для нього задачі. Як стверджують учені [6; 9], це може бути що завгодно, зокрема розв'язування математичних задач.

Математика як навчальний предмет має потужні можливості для реалізації завдання розвитку пізнавальних процесів. Саме на математичному змісті можна вчити дітей аналізувати, порівнювати, узагальнювати, класифікувати, відрізняти істотне від неістотного, формулювати гіпотези, перевіряти їх, досліджувати вплив зміни умови математичної задачі на її розв'язання та на очікуваний результат. Здатність логічно опрацьовувати інформацію, одержану різними способами, дозволить школяреві критично оцінити її достовірність; ця звичка спрямована на постійне дослідження, з'ясування залежності очікуваного результату від зміни однієї з вихідних умов. Звичка до прикидки очікуваного результату, а згодом і до його перевірки допоможе учневі надалі прогнозувати наслідки власних дій у повсякденному і професійному житті.

Очевидно, що модель навчання дітей цифрового покоління має бути іншою, ніж та, що існує зараз, а школа не повинна перетворюватися на муштру, дитина має відчувати радість від навчання [4].

Вихідним для нас є положення що, аби вчити дітей ефективно, потрібно знати когнітивні можливості дитини й когнітивні механізми тих процесів навчання, які впроваджуються [6]. Особливості молодших школярів — представників цифрового покоління — були предметом дослідження, проведеного в лабораторії психодіагностики Інституту психології імені Г. С. Костюка НАПН України [3]. Водночас когнітивні механізми нових технологій, нових методик навчання ще й досі не з'явилися в полі зору психологів та нейрофізіологів. Отже, актуальною є розробка методик навчання, зокрема математики, які враховують нейрофізіологічні та психологічні особливості сучасних дітей.

Основою всіх пізнавальних функцій людини є її мозок. Ученими встановлено, що нові інформаційні технології вимагають розвитку таких здібностей у дитини, які б допомагали якомога ефективніше діяти у віртуальному середовищі. Тому, зважаючи на пізнавальні особливості учнів цифрового покоління, розглянемо засоби навчання, методику побудови систем навчальних завдань, а також приділимо увагу формам роботи на уроці математики.

Основними засобами навчання математики, як і будь-якого навчального предмета, є підручник і зошит із друкованою основою. Очевидно, що змагатися з віртуальним світом, який пропонує дитині екшн, навчальному посібнику дуже складно. Тому при розробці макетів навчальних посібників треба враховувати звичку дитини до яскравої динамічної картинки, спецефектів, до високих рівнів стимуляції, які забезпечують відеоігри. А це вимагає не лише паперових навчальних посібників, тобто підручників, навчальних зошитів тощо, а й електронних додатків, які можна активувати, наприклад, за QR-кодами. Електронні додатки до уроків можуть являти собою мультимедійні презентації до уроків або до окремих завдань підручника чи інтерактивні завдання.

У наукових дослідженнях фіксується ряд нових особливостей сучасних дітей, таких як: погіршення обробки навчальної інформації, зниження об'єму слухової пам'яті та орієнтування на графічний образ слова [4]. Також слід зазначити, що представники цифрового покоління є переважно візуалами, які потребують наочної схематизації навчальних дій. Щоб урахувати цю здатність сучасних дітей, у підручниках, навчальних зошитах, мультимедійних презентаціях мають бути реалізовані поліграфічні засоби — виділення кольором слів, на які треба звернути увагу; використання системи стрілочок і дужечок, які допомагають учню встановити зв'язки або наштовхують на певні операції та є складниками орієнтувальної основи дії (ООД).

Паперові підручники, як і відповідні їм електронні сторінки, мають бути особливим чином поліграфічно оформлені, їхнє кольорове забарвлення повинно враховувати положення психології кольору; малюнки мають бути сучасними, зрозумілими дітям цифрового покоління.

У мультимедійних презентаціях за допомогою анімаційних ефектів, кольорових виділень має бути представлено навчальний зміст у динаміці, що полегшує сприймання дитиною навчальної інформації. У них має бути передбачено поступове розгортання схеми розв'язування, подання ООД; використання спеціальних засобів звернення уваги дітей на спільне й відмінне у розв'язаннях схожих завдань, у способах міркування тощо. Таким чином задовольняється потреба сучасних дітей у використанні інформаційних технологій, але ця віртуальна реальність контрольована вчителем і реалізує навчальні цілі, залучає дитину до колективної діяльності.

Під час розробки системи навчальних завдань повинно бути враховано те, що одноманітна тренувальна робота викликає в сучасних дітей нехіть [4]. Тому при формуванні нової дії ми пропонуємо використовувати як прямі, так і трансформовані вправи, які передбачають зворотний напрямок думки; використовувати різні формулювання та форми подання тренувальних вправ; поєднувати завдання на обчислення з іншими діями, такими як розфарбовування, пошук або подання інформації в графічному вигляді тощо.

Психологами встановлено, що діти цифрового покоління здійснюють пошук відповідей здебільшого простим перебором варіантів. Цьому сприяє і впровадження тестових методик перевірки знань, умінь і навичок учнів. Тому доцільно зробити акцент на розгорнутих записах розв'язання, на коментуванні виконуваних дій, а не на кінцевих відповідях. Зважаючи на цю особливість учнів цифрового покоління, доцільно не зловживати тестовими завданнями закритої форми. Такі завдання учні мають виконувати вже після того, як вони опанували нове знання, здобули вміння або навички виконання дії.

Оскільки діти цифрового покоління виявляють бажання завжди бути переможцями, а власні невправності в них породжують злість [4], система навчальних завдань має забезпечувати учням досягнення успіху. Надамо рекомендації до побудови системи навчальних завдань, спрямованої на досягнення успіху кожним учнем за рахунок розтягнення в часі вивчення певного питання програми:

- включення підготовчих завдань задовго до вивчення певного питання, їх поступове видозмінення, ускладнення;
- формування окремих операцій, що становлять нову дію, яку буде введено пізніше;
- ознайомлення з новим матеріалом за допомогою аналізу процесу розв'язування завдань, які пропонувалися школярам на підготовчому етапі, їх трансформація/композиція, у результаті чого або формулюється висновок про нове поняття, або встановлюється взаємозв'язок між математичними об'єктами, або відкривається новий для учнів спосіб дії;
- ознайомлення з новим матеріалом за допомогою ускладнення підготовчих вправ;
- ознайомлення з новим матеріалом за допомогою дослідження залежності раніше вивченого способу дії відповідно до змінених умов;
- використання різноманітних наочних опор для виконання дії: пам'яток, опорних конспектів, схем розв'язування, мультимедійних презентацій, у яких за допомогою анімаційних

ефектів увага школярів акцентується на певних моментах ООД;
- безперервне повторення раніше вивчених понять і способів дії.

Для розвитку пізнавальних процесів і корекції таких особливостей дітей цифрового покоління, як: погіршення уваги; синдром розсіяної уваги (вони погано помічають деталі, «не бачать» елементи розповіді, загадки, математичної задачі); кліпове (net) мислення — звичка використовувати гіпертекст, у якому думки не утворюють послідовної структури, а зв'язані асоціативно; погіршення аналітико-синтетичного мислення; порушення процесу аналізу явищ; нездатність осмислювати інформацію, розрізняти навіть протилежні твердження; втрата здатності до сприймання об'ємних текстів, — у системі навчальних завдань повинні бути передбачені завдання на розвиток уваги, завдання з логічним навантаженням, завдання, сформульовані нестандартно, тощо.

Особливістю учнів цифрового покоління є уявна багатозадачність — вони одночасно намагаються виконувати кілька справ. Але психологи встановили, що мозок дітей не зосереджується на жодній із них; у них гарно виходить лише швидко перемикатися з однієї задачі на іншу [4]. Цю особливість слід враховувати як у розробці систем навчальних завдань, так і при плануванні видів і форм роботи на уроці математики. Зміна видів діяльності традиційно реалізується на уроках математики, оскільки в процесі комбінованого уроку учні виконують різні види завдань — від усної лічби до розв'язування завдань із логічним навантаженням.

Для врахування індивідуальних особливостей дітей, чверть із яких характеризуються повільністю [6], доцільним є «рваний» темп уроку, що створює можливість для вибудовування школярами своєї системи поведінки. Також слід змінювати не тільки види й темп діяльності, але й форми організації діяльності на уроці: робота в малих групах, у парах, колективна робота. Технологічно це може бути реалізовано таким чином. На етапах актуалізації опорних знань і способів діяльності відкриття ООД шляхом створення й розв'язання проблемної ситуації, на перших етапах формування дії основною формою роботи має бути колективна. Далі в міру засвоєння дії форми роботи змінюються від роботи в парах до роботи в групах.

Отже, для ефективного навчання учнів цифрового покоління потрібно реалізовувати методики й технології навчання, які спираються на їхні пізнавальні особливості та коригують певні недоліки. Це передусім звичка до високих рівнів стимуляції, яскравої й динамічної картинки, неспроможність логічного оброблення інформації, які мають бути враховані в оформленні поліграфічних засобів навчання (підручників, зошитів), наочних засобів навчання, електронних матеріалів для використання на уроках тощо. Урахування бажання дітей цифрового покоління завжди бути переможцями, їхньої нездатності відкладати задоволення, небажання виконувати тренувальні вправи має бути враховано в системі навчальних завдань, що повинна забезпечувати учням досягнення успіху в процесі математичної діяльності.

1.2. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ 3–4 КЛАСІВ З УРАХУВАННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПЕРЕБІГУ КОГНІТИВНИХ ПРОЦЕСІВ

У курсі математики другого циклу навчання (3–4 класи) реалізуються визначені Державним стандартом початкової освіти [1] мета і завдання математичної освітньої галузі, що забезпечують досягнення обов'язкових результатів навчання.

Загальна методика навчання математики транслюється через методичні системи, зокрема такі:

1) формування знань та вмінь із нумерації цілих невід'ємних чисел та звичайних дробів;
2) формування обчислювальних навичок;
3) формування вмінь розв'язувати сюжетні математичні задачі;
4) алгебраїчна пропедевтика;
5) геометрична пропедевтика.

Методична система формування знань та вмінь із нумерації цілих невід'ємних чисел та звичайних дробів в учнів 3–4 класів реалізується шляхом організації навчальної діяльності на матеріалі концентрів «Тисяча» та «Багатоцифрові числа». Вивчення питань нумерації здійснюється у два етапи: усна нумерація та письмова нумерація. Завданнями вивчення усної нумерації передбачено отримання нової лічильної одиниці; вправляння в лічбі новою лічильною одиницею, зокрема в зіставленні з раніше вивченою; порівняння, додавання і віднімання, множення і ділення чисел, поданих у новій лічильній одиниці. Вправляння в читанні та записі круглих чисел вимагають виконання розумових дій аналізу, зіставлення; передбачають міркування за аналогією. Наступним кроком у вивченні нумерації є одержання чисел з одиниць різних розрядів. Пропонуються завдання, у яких одержання чисел ілюструється на наочності; завдання на запис числа в таблиці розрядів, запис чисел без таблиці розрядів із вказуванням їхнього розрядного складу та без такої вказівки. Передбачається виконання розумових дій аналізу та класифікації чисел за кількістю цифр, що використовуються для їхнього запису. Далі вивчається порівняння чисел у межах концентру, а потім — додавання, віднімання, множення і ділення на підставі нумерації.

Водночас із нумерацією цілих невід'ємних чисел вивчаються й основні величини: довжина, маса, місткість, час; геометричні величини: периметр, площа. З розширенням множини чисел за аналогією вводяться нові одиниці вимірювання величин на підставі підведення учнів до необхідності знаходження іншої мірки. Значна увага приділяється суті процесу вимірювання величин, заміні більших одиниць вимірювання меншими і навпаки; заміні складеного іменованого числа простим та простого складеним; порівнянню іменованих чисел.

Система формування поняття дробу охоплює два складники: 1) формування поняття частини; 2) формування поняття дробу. Відповідний матеріал вивчається з використанням великої кількості наочності, що ілюструє процес одержання частин. Вивчення цього матеріалу пропонується на пропедевтичному рівні, у завданнях застосовується ілюстративний матеріал або пропонується скористатися схематичним рисунком. Учням пропонуються завдання на запис і читання дробів; на запис дробів, що дорівнюють поданим; на порівняння дробів; на розташування їх у порядку зростання або в порядку спадання. Поступово вводяться поняття дробів, які дорівнюють 1; дробів, більших або менших від 1; правило порівняння дробів із рівними знаменниками або рівними чисельниками; правило знаходження дробу від числа та числа за величиною його дробу та ін. Пропонуються різноманітні види складених задач, які містять знаходження дробу від відомого числа та дробу від невідомого числа, а також задачі, що містять знаходження числа за величиною його частини.

Методична система формування в молодших школярів **обчислювальних навичок** заснована на розумінні обчислювальної навички як найвищого ступеня опанування прийому обчислення і має бути побудована на основі психологічної теорії поетапного формування розумових дій і понять П. Гальперіна [7] та Н. Тализіної [8], відповідно до якої засвоєння полягає в тому, що пізнавальна діяльність і введені до неї знання набувають розумової форми не відразу, а поступово, проходячи ряд етапів: 1-й етап — створення мотивації, попереднього ознайомлення з дією; 2-й етап — матеріальної або матеріалізованої дії; 3-й етап — зовнішнього мовлення; 4-й етап — зовнішнього мовлення «про себе»; 5-й етап — розумовий.

Метою методичної системи є формування в молодших школярів повноцінної обчислювальної навички, що характеризується правильністю, усвідомленістю, раціональністю, узагальненістю, автоматизмом і міцністю. Досягнення цієї мети здійснюється через систему навчальних завдань.

На всіх стадіях формування обчислювальної навички вирішальну роль відіграють вправи на застосування прийомів обчислення. На різних етапах вони виконують різні функції: на першому — служать розкриттю змісту діяльності, яка підлягає засвоєнню; на всіх наступних — виступають як засіб засвоєння цієї діяльності.

На перших етапах поетапного формування розумових дій виділяється психологічна частина цілеспрямованої дії — його орієнтувальна частина. Робота з визначення змісту обчислювального прийому відбувається здебільшого за третім типом орієнтування. Для цього необхідно вводити підготовчі завдання, які допомагають учням «розкрити» зміст нового прийому обчислення. Ці завдання вимагають від учня здійснення розумових дій аналізу, порівняння, узагальнення. Крім того, прийоми обчислення частинами, порозрядного додавання і віднімання, округлення тощо використовуються в кількох концентрах (наприклад: «Десяток», «Сотня», «Тисяча»). Тому необхідні завдання, які допомагають учню «перенести» відомий прийом міркування в нову навчальну ситуацію через зіставлення відомого випадку обчислення з новим, у якому відбулися певні зміни; визначення впливу цих змін на процес розв’язування.

Зміна дії за формою відбувається через подання схеми дії засобом виконання завдань за схемою, на закінчення розв’язання, на перевірку й оцінювання правильності вже кимось виконаних завдань тощо. Також завданнями повинно бути передбачено коментування процесу розв’язування. Отже, дія виконується в голосному мовленні. Проте мають бути й такі завдання, що вимагають скорочених міркувань: промовляння дії «про себе», називаючи лише проміжні та кінцевий результати. А також такі завдання, які вимагають швидких обчислень, що відповідає вже етапу виконання дії в розумовому плані.

Методичною системою формування обчислювальних навичок повинно бути передбачено врахування вимог, запропонованих Н. Тализіною [8], до змісту та форми завдань, а саме: з метою запобігання передчасному згортанню та автоматизації дії з перших кроків її засвоєння слід пропонувати неоднотипні завдання. Вправи нової теми від першого ж моменту її вивчення мають чергуватися з вправами з попередньої теми й інколи з кількома незвичними для учнів завданнями, зокрема такими:

- завдання, деякі особливості яких схожі з особливостями завдань нової теми: учні повинні навчатися не лише виконувати

нові завдання, а й швидко їх впізнавати, відрізняючи від найбільш схожих;
- завдання з попередніх розділів, спосіб розв'язування яких учні поки що не засвоїли;
- завдання, у яких розглядаються окремі моменти наступних завдань або теоретичних питань.

Однотипні завдання пропонуються на останньому етапі засвоєння — розумовому, коли знання і дії досягли заданої міри узагальненості, можуть скорочуватися та автоматизуватися, набирати швидкості.

Отже, методична система формування в молодших школярів обчислювальних навичок забезпечує засвоєння знань і вмінь раціонального порядку й водночас формує установку на дослідження. Ця система охоплює підсистеми формування обчислювальних навичок додавання і віднімання, множення і ділення. Ці підсистеми так само мають по два складники: формування навичок усних обчислень, формування навичок письмових обчислень, які також розглядаються як системи.

Арифметичні дії додавання і віднімання, множення і ділення доцільно пропонувати для вивчення одночасно і в порівнянні. Основною метою відповідної системи завдань є формування міцної обчислювальної навички, що характеризується свідомістю, гнучкістю, узагальненістю й перенесенням на підставі застосування різноманітних обчислювальних прийомів.

Для формування міцної обчислювальної навички будуть корисними завдання на обчислення зручним способом, які передбачають тотожні перетворення математичних виразів. Таким чином, знаходження значень числових виразів відбувається не лише на основі правил порядку виконання арифметичних дій, а й на основі застосування певних законів та властивостей арифметичних дій; дослідження залежності результатів арифметичних дій від зміни їх компонентів. Водночас з арифметичними діями над числами виконуються арифметичні дії над іменованими числами з використанням кількох способів міркувань.

Методична система навчання учнів початкових класів **розв'язування сюжетних математичних задач** ґрунтується на визначенні поняття «уміння розв'язувати сюжетні математичні задачі», а також на визначенні видів умінь розв'язувати задачі (загального вміння та вміння розв'язувати задачі певних видів) [5]. Для успішного навчання учнів розв'язування задач та для розвитку їхнього мислення необхідне спеціальне формування загального вміння розв'язувати сюжетні задачі через поступове опрацювання всіх складових, що складають загальне вміння розв'язувати задачі. Це досягається застосуванням спеціальної системи навчальних завдань. Тобто необхідна система завдань, яка спрямована не на отримання розв'язку кожної задачі, а на опрацювання окремої дії. При формуванні вміння розв'язувати сюжетні задачі власне задача та її розв'язування стають предметом змістовного аналізу дослідження впливу змін в умові задачі на її розв'язання.

Головним методом навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач є частково-пошуковий, який базується на особливих системах взаємопов'язаних навчальних задач. Ці системи побудовані таким чином, щоб спонукати учня виконувати операції порівняння, абстрагування, узагальнення, тобто спрямовані на розвиток мислення дитини. Проте на перших етапах використовуються репродуктивні методи навчання.

Основними засобами навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач є репрезентативні та розв'язувальні моделі. Репрезентативні моделі постають у вигляді короткого запису задачі (схеми чи таблиці) або у вигляді схематичного рисунка; розв'язувальні моделі — у вигляді «дерева міркувань». До засобів навчання розв'язування задач належать також дидактичні матеріали: тексти пам'яток, опорні схеми простих і складених задач, опорні схеми типових задач та узагальнені плани їх розв'язування тощо.

Важливими для формування вміння розв'язувати задачі є системи завдань, спрямовані на опанування учнями семантичним аналізом тексту задачі та на подання результатів цього аналізу у вигляді репрезентативної моделі — схематичного рисунка, а також на обґрунтування на основі цієї моделі вибору арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується задача. Це передбачено вимогами до рівня навчальних досягнень учнів типовими освітніми програмами з математики [2]. Формування вміння розв'язувати прості задачі поширюється на 1–4 класи і реалізується за допомогою відповідних систем навчальних задач.

Для запобігання механічному запам'ятовуванню учнями способу розв'язування складених задач окремих математичних структур, як це відбувається в багатьох випадках, ознайомлення з поняттям «складена задача» та процесом її розв'язування має відбуватися на різноманітних математичних структурах задач. Такий підхід спонукає учнів до засвоєння дій із розв'язування задачі, а не до заучування плану розв'язування.

Істотним в організації діяльності учнів на етапі ознайомлення з поняттям «складена задача» (як і з поняттям «задача») є її спрямованість не на розв'язання кожної конкретної задачі, а на опанування певних дій, на засвоєння цього поняття.

У 3 і 4 класах учні продовжують розв'язувати складені задачі різноманітних математичних структур. Особлива увага приділяється задачам, що містять дроби.

Також учні вперше ознайомлюються з типовими задачами — задачами, що містять однакову величину, і задачами на процеси за допомогою системи навчальних завдань — добірок (ланцюжків) допоміжних задач — розв'язання яких природно приводить учнів до визначення й узагальнення способу розв'язування задачі певного виду.

Методика навчання розв'язування задач, що містять однакову (сталу) величину, які пропонуються в 3–4 класах, передбачає формування вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці. Методика формування в молодших школярів уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного (3–4 клас) передбачає дослідження задачі на таких рівнях: зміна групи взаємопов'язаних величин; зміна числових даних; зміна однакової величини; зміна шуканої величини при певній однаковій величині, причому кожного разу визначається вплив зміни, що сталася, на план розв'язування задачі. Дослідження задачі за зміною числових даних із метою застосування іншого способу розв'язування дозволяє визначити умови застосування кожного способу. Отже, системою завдань передбачено визначення істотних ознак задач на знаходження четвертого пропорційного та узагальнення їх способів розв'язування: способу знаходження однакової величини для двох випадків та способу відношень; установлення можливості застосування кожного з цих способів.

Система завдань із формування вміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження невідомих за двома різницями (4 клас) побудована за єдиним планом, у якому реалізовано такі аспекти:

1) для усвідомлення учнями зв'язку задач на знаходження четвертого пропорційного (на пропорційне ділення) і задач на пропорційне ділення (на знаходження невідомих за двома різницями) здійснюється перетворення задачі відомого виду на задачу нового виду;
2) дослідження задачі реалізується шляхом: зміни величин або числових даних задачі, зміни шуканих, зміни однакової величини і визначення впливу цих змін на план розв'язування задачі.

Такий усебічний аналіз дає можливість узагальнити істотні ознаки задач цих видів і узагальнити план їх розв'язування способом знаходження однакової величини.

До обов'язкових для всіх учнів питань не належать дослідження задач на пропорційне ділення та задач на знаходження невідомих за двома різницями засобом зміни однакової величини, а також порівняння задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями з метою визначення спільних істотних ознак їх математичних структур та узагальнення способу їх розв'язування. Цей навчальний матеріал пропонується для поглибленого вивчення математики здібними та обдарованими учнями.

Аналогічним чином будується система завдань із навчання молодших школярів розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці з тією відмінністю, що дослідження задач цього виду не відбувається за допомогою зміни однакової величини. З метою визначення зв'язку між задачами на знаходження четвертого пропорційного та на подвійне зведення до одиниці задача на знаходження четвертого пропорційного, у якій однаковою (сталою) є величина однієї одиниці вимірювання, перетворюється на задачу на подвійне зведення до одиниці: порівнюються їх розв'язання, визначаються спільні істотні ознаки та узагальнюється спосіб розв'язування, але ці питання не віднесено до обов'язкових.

Формування в учнів уміння розв'язувати задачі на спільну роботу відбуваються в 3 та 4 класах. У 3 класі пропонуються задачі на спільну роботу, у яких задані продуктивності праці кожного виконавця, а в 4 класі не задано продуктивності праці кожного виконавця, вони є проміжними невідомими. Системою завдань передбачено дослідження задач на спільну роботу за такими змінами: зміною ситуації задачі; зміною числових даних задачі; зміною шуканого задачі; зміною характеру дій виконавців. Таке дослідження задачі є потужним засобом визначення істотних ознак математичної структури та плану розв'язування задачі.

У ході формування в молодших школярів уміння розв'язувати задачі на рух у 4 класі реалізується підхід, коли задачі на одночасний рух двох тіл назустріч і в протилежних напрямках розглядаються разом. Спочатку розв'язуються задачі на знаходження відстані і швидкості першим способом, а потім вводиться другий спосіб і вивчаються задачі на знаходження часу. Дослідження задач на одночасний рух відбувається за такими змінами: за зміною напрямку руху тіл; за зміною числових даних задачі; за зміною шуканого. Системою завдань має передбачатися визначення впливу цих змін на математичну структуру задачі та план її розв'язування, що допомагає учням сформулювати істотні ознаки задач на одночасний рух двох тіл у різних напрямках та план їх розв'язування. Серед додаткових питань плану чільне місце посідає узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці знаходять дією додавання, та задач на рух у різних напрямках; вивчення задач на рух двох тіл в одному напрямку з подальшим узагальненням їх математичних структур та способів розв'язування, а також задач на спільну роботу, у яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання.

Методична система алгебраїчної пропедевтики реалізується з метою формування в молодших школярів правильних наукових понять, розвитку математичного мовлення із застосуванням математичної термінології, логічного мислення.

Методична система алгебраїчної пропедевтики містить три підсистеми:

1) формування поняття рівності, нерівності, виразу (числового та виразу зі змінною); формування вміння знаходити значення виразів, зокрема засобом тотожних перетворень, порівнювати математичні вирази;
2) формування поняття рівняння, вміння розв'язувати прості та ускладнені рівняння;
3) формування поняття нерівності зі змінною.

З метою формування в учнів правильних математичних понять уже з початку вивчення математики учні ознайомлюються з алгебраїчними поняттями: рівність, нерівність, вираз (сума та різниця), значення виразу; вчаться застосовувати відповідну термінологію в мовленні. З перших кроків опанування математики як навчального предмета система завдань містить чіткі формулювання типу: «знайди значення виразу (лише сум або лише різниць)», «визнач, чи є рівності (нерівності) істинними чи хибними», «порівняй числа і прочитати нерівності зліва направо та справа наліво», «порівняй число і вираз», «порівняй два вирази» тощо.

Отже, алгебраїчна пропедевтика передбачає не лише введення відповідних понять та термінів, а й широке використання їх у навчальному змісті, що готує дітей до навчання в основній школі й систематичного вивчення курсу алгебри і тим самим реалізує наступність між основною та початковою ланками освіти.

Розвиток логічного мислення дитини реалізується засобом вправ, що передбачають порівняння нового з уже відомим, і на цій основі — підведення учнів або до міркування за аналогією, або до здогадки, як зміна умови вплине на розв'язання тощо. Отже, системою завдань передбачено непряме формування прийомів розумових дій: аналізу, синтезу, порівняння, класифікації, узагальнення, міркування за аналогією тощо.

Дослідження залежності результату арифметичної дії від зміни одного з компонентів реалізує мету формування в молодших школярів функціонального мислення.

Введення поняття рівняння (3 клас) мотивується як необхідність виконання оберненого завдання до знаходження значень виразів зі змінною. Розглядаються означення рівняння, розв'язку, або кореня рівняння; у завданнях пропонується розв'язати рівняння способом добору, або на основі правила знаходження невідомого компонента, або на основі властивостей рівностей. Саме останній спосіб розв'язування рівнянь є дієвим засобом розвитку логічного мислення молодших школярів.

Ускладнене рівняння вводиться шляхом його зіставлення з відповідним простим рівнянням і визначення тих кроків, які потрібно зробити, щоб звести його до простого. Для учнів 3 класу пропонуються ООД у вигляді пам'яток для розв'язування простих рівнянь різними способами; для розв'язування рівнянь, у яких права частина або один із компонентів подано числовим виразом або в яких один із компонентів — вираз зі змінною. Система завдань має бути побудована таким чином, щоб діти спочатку добирали розв'язки рівняння із запропонованих; потім розв'язували прості рівняння одним способом, а далі й двома способами; зіставляли прості рівняння із відповідними ускладненими і визначали, як звести їх до простих; розв'язували пари рівнянь; знаходили суму або різницю коренів рівнянь тощо.

Кульмінацією вивчення рівнянь є ознайомлення з алгебраїчним способом розв'язування задач (3 клас). Засобом системи навчальних задач діти переконуються, що алгебраїчний метод розв'язування задач дозволяє їм розв'язувати навіть ті задачі, які раніше їм здавалися дуже складними. Треба зазначити, що, починаючи з 3 класу, діти ознайомлюються з розв'язуванням типових задач способом складання рівняння.

Опанування алгебраїчного методу розв'язування задач не є обов'язковим для всіх учнів: діти, яким сподобався цей метод, можуть і далі розв'язувати задачі способом складання рівняння, якщо це буде зручнішим; інші учні можуть і надалі розв'язувати задачі по діях, але в них має скластися уявлення про існування іншого методу — алгебраїчного. Такий крок має на меті реалізацію наступності між початковою та основною школами; підготовку дітей до подальшого опанування алгебраїчного методу розв'язування задач у 5 та 6 класах.

Також із метою реалізації наступності між початковою та основною школами системою завдань для учнів 3–4 класів має бути передбачено формування уявлення про нерівності зі змінною, про множинність або відсутність їх розв'язків. Учні спочатку добирають розв'язки нерівностей із запропонованих чисел, потім учаться розв'язувати нерівності способом зведення до рівняння, а далі й логічним способом — на підставі залежності результату від зміни компонента арифметичної дії.

Методична система геометричної пропедевтики, як і алгебраїчної, є наскрізною в плані її реалізації. У 3–4 класах розширюється знання про коло і круг та їхні елементи. Також передбачено ознайомлення молодших школярів із видами трикутників, пропонується здійснити їх класифікацію за кутами або сторонами; визначити кількість прямих, тупих та гострих кутів у трикутниках певного виду тощо. Проте від учнів не вимагається засвоєння означень геометричних понять, окрім означень прямокутника і квадрата. Метою системи завдань є навчання учнів креслення за допомогою креслярських інструментів кутів (гострих, тупих, прямих), відрізків заданої довжини, прямокутників із заданими довжинами сторін, квадратів із заданою довжиною сторони, кіл із заданим радіусом.

Ефективність реалізації методичних систем забезпечується завдяки застосуванню в навчальному процесі сучасних педагогічних технологій.

Навчання математики особливо продуктивне, якщо ґрунтується на засадах теорії укрупнення дидактичних одиниць П. Ердniєва [10]. Рекомендується одночасне вивчення взаємно обернених дій — додавання і віднімання, множення і ділення, що дозволяє дитині перевіряти правильність виконання дій відразу після розв'язування завдання, а також розвиває гнучкість мислення. Ця теорія застосовується і в методичній системі формування вмінь розв'язувати задачі: досить багато завдань передбачають складання й розв'язування обернених задач, задач нового типу.

Доцільним буде використання ідей теорії розвивального навчання, що реалізує систему завдань, яка забезпечує розвиток логічного мислення учнів, формування прийомів розумових дій і передбачає виконання учнями аналізу, порівняння, узагальнення, класифікації, а також виконання дій кодування й декодування тощо. Корисно пропонувати учням чимало завдань, які передбачають формування дії моделювання, підведення під поняття, виведення наслідків із того, що об'єкт належить до певного поняття тощо.

Технології проблемного навчання можуть реалізовуватися засобами завдань, що пропонуються на етапі введення нових знань. Саме вони допомагають створювати проблемну ситуацію.

Ігрові технології можуть реалізовуватися за допомогою завдань, поданих у цікавій для дітей формі.

Технології організації навчального співробітництва впроваджуються через завдання, які передбачають взаємоперевірку, розгляд розв'язків інших дітей у класі, оцінювання вже кимось розв'язаних завдань, виправлення кимось зроблених помилок тощо.

Технології диференційованого навчання реалізуються через різнорівневі завдання обов'язкового і підвищеного рівнів, завдання з логічним навантаженням тощо. Таким чином здійснюється диференціація не лише за рівнем складності завдань, а й за мірою допомоги, що надається учням.

Технології формування загальнонавчальних умінь і навичок впроваджуються через завдання, що передбачають виконання розумових дій аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення, класифікації, конкретизації, що непрямо впливають на їх формування в дитини. Численні завдання мають передбачати виконання дій самоконтролю шляхом попередньої прикидки очікуваного результату, або засобом перевірки розв'язання за правилом перевірки, якщо це стосується виконання арифметичних дій, або шляхом складання і розв'язування оберненої задачі, розв'язування задачі іншим способом чи засобом прямої перевірки під час розв'язування задачі.

Розвиток математичного мовлення молодших школярів відбувається шляхом використання пам'яток, коментування вже готового розв'язання або розв'язання з розгорнутим коментуванням, подання математичних завдань в усній формі тощо.

Значна увага в навчанні математики в другому циклі початкової школи має приділятися питанням наступності та перспективності між початковою і основною школами. Це відбивається в ознайомленні учнів із математичною термінологією, у розвитку математичного мовлення, у приділенні більшої уваги алгебраїчній пропедевтиці: навчанню розв'язування рівнянь складнішої структури, ознайомленню з алгебраїчним методом розв'язування задач, навчанню розв'язування нерівностей зі змінною. Якісне формування геометричних уявлень і понять, що передбачено відповідними системами навчальних задач, створює необхідне підґрунтя для опанування випускниками початкової школи тем геометричного змісту в 5–6 класах.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ НУМЕРАЦІЇ ЧИСЕЛ ТА АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ ІЗ ЧИСЛАМИ

2.1. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ НУМЕРАЦІЇ ЧИСЕЛ ТА АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ ІЗ ЧИСЛАМИ В 3 КЛАСІ

2.1.1. Методика вивчення табличного множення і ділення

Наочний і дидактичний матеріал:

- набірне полотно «Таблиця множення»;
- таблиця множення (таблиця Піфагора);
- шаблон таблиці Піфагора;
- тренажери для вивчення таблиць множення і ділення.

У 2 класі учні опанували тему «Табличне множення та ділення», разом з учителем склали всі таблиці множення та ділення і навчилися застосовувати в обчисленнях знання таблиць множення та ділення чисел 2 і 3. Зазначимо, що в решті випадків табличного множення і ділення учні могли користуватися таблицями.

У 3 класі ставиться мета набуття учнями обчислювальної навички табличного множення і ділення.

Зазначимо, що перед розглядом табличного множення і ділення в 3 класі доцільно здійснити узагальнення та систематизацію знань і вмінь учнів із нумерації чисел у межах 100, суті арифметичних дій додавання та віднімання, а також прийомів додавання та віднімання. Детальніше див. за посиланням.

З метою формування в третьокласників обчислювальної навички табличного множення і ділення доцільно узагальнити і систематизувати знання учнів щодо складання таблиць множення і ділення та відтворення табличних результатів. Також, використовуючи залежність значення добутку від зміни одного з множників, з пропедевтичною метою можна ознайомити школярів із послідовним множенням.

Таблиці множення можуть бути складені за сталим першим множником (тоді при заміні множення додаванням в усіх випадках таблиці одержимо суми однакових чисел) або за сталим другим множником (у цьому випадку при заміні множення додаванням одержимо суми з однаковою кількістю доданків). Традиційно таблиці множення складаються за сталим першим множником, змінюється другий множник.

Нагадаємо, що таблиці множення складаються на підставі суті арифметичної дії множення, а відтворення табличних результатів може бути здійснено кількома способами:

1) на підставі конкретного змісту дії множення: $2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$;
2) на підставі переставної властивості дії множення: $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$;
3) на підставі попереднього значення: $3 \cdot 7 = 3 \cdot 6 + 3 = 18 + 3 = 21$;
4) на підставі наступного значення: $3 \cdot 9 = 3 \cdot 10 - 3 = 30 - 3 = 27$;
5) способом групування: $2 \cdot 8 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 8 + 8 = 16$;
6) способом послідовного множення: $2 \cdot 8 = (2 \cdot 4) \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$.

Ці способи є також способами запам'ятовування табличних результатів. Відтворюючи табличні результати різними способами, ми тим самим працюємо над їх запам'ятовуванням: кожний учень відшукує зручний для себе спосіб відновлення результату «важкого» випадку з таблиці множення.

УЗАГАЛЬНЕННЯ СПОСОБІВ СКЛАДАННЯ ТАБЛИЦЬ МНОЖЕННЯ ЧИСЕЛ 2 ТА 3

На етапі актуалізації слід повторити суть арифметичних дій множення і ділення, назви компонентів і результатів цих дій, математичні вирази «добуток» і «частка».

Пропонуємо учням, використовуючи набірне полотно «Таблиця множення», скласти таблиці множення чисел 2 і 3 способом *на підставі конкретного змісту дії множення* (способом заміни арифметичної дії множення додаванням). Далі переходимо до зіставлення складених таблиць.

Пропонуємо порівняти таблиці множення чисел 2 і 3 і визначити, чим вони схожі. Учні помічають, що в кожній із таблиць добутки містять однаковий перший множник (числа 2 і 3 відповідно), який позначає однаковий доданок у сумах.

$$2 \cdot 1 = 2$$
$$2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$$
$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2 = 6$$
$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$
$$2 \cdot 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$
$$2 \cdot 6 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$
$$2 \cdot 7 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$$
$$2 \cdot 8 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$
$$2 \cdot 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$$
$$2 \cdot 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$$

$3 \cdot 1 = 3$
$3 \cdot 2 = 3 + 3 = 6$
$3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 9$
$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$
$3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$
$3 \cdot 6 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$
$3 \cdot 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$
$3 \cdot 8 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$
$3 \cdot 9 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27$
$3 \cdot 10 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$

Слід зазначити, що під час узагальнення таблиць множення є можливість повторити вирази зі змінною, знаходження значень виразів зі змінною при певному значенні змінної.

З цією метою пропонуємо учням визначити, що спільне в усіх випадках таблиці множення числа 2. Учні з'ясовують, що в усіх випадках перший множник — число 2. Після цього пропонуємо замінити другий множник буквою і записати вираз зі змінною [$2 \cdot a$].

Потім пропонуємо визначити, що спільне в усіх випадках таблиці множення числа 3 [в усіх виразах перший множник — число 3]; замінити другий множник буквою і записати вираз зі змінною [$3 \cdot a$].

Запитуємо, яких значень може набувати змінна a, і пропонуємо знайти значення записаних виразів зі змінною при $a = 2$, використовуючи суть арифметичної дії множення. Учні з'ясовують, чим схожі отримані рівності [у добутках однаковий другий множник — число 2; це означає, що якщо ми замінимо множення додаванням, то в сумах одержимо однакову кількість доданків — два доданки]; чим визначається ця загальна властивість [загальна властивість визначається даним за умовою однаковим другим множником, який вказує на те, скільки разів потрібно додати однакові доданки]; чим відрізняються отримані рівності [отримані рівності відрізняються першими множниками].

Після цього пропонуємо знайти значення виразів зі змінною при $a = 3$; порівняти отримані рівності. Далі — знайти значення виразів зі змінною при $a = 4$, $a = 5$, $a = 6$, $a = 7$, $a = 8$, $a = 9$; порівняти попарно отримані рівності.

Для того щоб учні усвідомили і користувалися в подальшому способами відтворення табличних результатів *на підставі попереднього або наступного значення* таблиці множення, доцільно дослідити кожну таблицю множення окремо і з'ясувати, на скільки кожний наступний результат більший за попередній, і навпаки. Обов'язково слід визначити причину цієї відмінності.

З цією метою пропонуємо учням порівняти добутки з таблиці множення числа 2; з'ясувати, на скільки відрізняється кожний наступний результат від попереднього; чому це відбувається.

Потім пропонуємо порівняти добутки з таблиці множення числа 3; з'ясувати, на скільки відрізняється кожний наступний результат від попереднього; чому це відбувається.

З'ясовуємо, чому в кожній таблиці наступний результат більший за попередній: «На скільки більший кожний наступний результат у таблиці множення числа 2? А в таблиці множення числа 3? числа 4? числа 5?.. Чому саме на ці числа?» [Тому що це перші множники, а перші множники визначають однакові доданки. У кожному наступному виразі на один такий доданок більше, тому і результат більший на це ж число.]

З'ясовуємо, на скільки кожний попередній результат менший від наступного. [У таблиці множення числа 2 кожний попередній результат менший від наступного на 2, тому що в попередній сумі на один доданок — число 2 — менше. У таблиці множення числа 3 — на 3; у таблиці множення числа 4 — на 4...] Це і є «секрет» усіх таблиць множення!

Для закріплення отриманих знань пропонуємо учням відповісти на запитання, як застосувати попереднє значення для відновлення певного результату з таблиці множення числа 2; числа 3. Просимо розказати таблиці множення чисел 2 і 3 зверху вниз, використовуючи попереднє значення. Запитуємо, як застосувати наступне значення для відновлення певного результату з таблиці множення числа 2; числа 3. Просимо розказати таблиці множення чисел 2 і 3 знизу вверх, використовуючи наступне значення. (Слід пам'ятати, що $2 \cdot 10 = 20$, а $3 \cdot 10 = 30$.)

З метою запам'ятовування результатів таблиць множення корисними є вправи на визначення закономірності та продовження ряду чисел; на виключення зайвого числа, яке не задовольняє визначену закономірність. Наприклад, такі.

1. Продовжте ряди чисел:

4, 6, 8, ...;

6, 9, 12, ...

2. Продовжте ряди чисел:

27, 24, 21, ...;

18, 16, 14, ...

Також, узагальнюючи знання таблиць множення та ділення, слід звернути увагу на спосіб відтворення табличних результатів *на підставі переставної властивості дії множення*.

Для цього запитуємо в учнів, який закон множення вони знають; просимо сформулювати переставний закон множення; навести приклад, для якого випадку з таблиці множення числа 3 зручно застосувати переставний закон [$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$].

З метою ознайомлення з різними способами міркування при відтворенні результатів таблиць множення слід ознайомити учнів зі способом *групування*.

Для цього запитуємо в учнів, чи легко їм запам'ятовуються перші два добутки з таблиць множення. Повідомляємо, що, знаючи ці добутки, вони зможуть дізнатися й усі інші добутки таблиць множення.

Пропонуємо учням виконати завдання.

3. Знайдіть добуток чисел 2 і 4; 3 і 4.

Запитуємо в учнів, скільки в цих сумах двійок; трійок. Пропонуємо згрупувати їх по дві. Запитуємо, чому дорівнює сума двох двійок; двох трійок. Просимо подумати, як легко знайти ці добутки, чи потрібно додавати двійки; трійки.

Аналогічно міркуємо для решти випадків.

$2 \cdot 2 = 4$

$2 \cdot 3 = 6$

$$2 \cdot 4 = \boxed{2+2} + \boxed{2+2} = 8$$
$$4 + 4 = 8$$

$$2 \cdot 5 = \boxed{2+2+2} + \boxed{2+2} = 10$$
$$6 + 4 = 10$$

$$2 \cdot 6 = \boxed{2+2+2} + \boxed{2+2+2} = 12$$
$$6 + 6 = 12$$

$$2 \cdot 7 = \boxed{2+2+2+2} + \boxed{2+2+2} = 14$$
$$8 + 6 = 14$$

$$2 \cdot 8 = \boxed{2+2+2+2} + \boxed{2+2+2+2} = 16$$
$$8 + 8 = 16$$

$$2 \cdot 9 = \boxed{2+2+2} + \boxed{2+2+2} + \boxed{2+2+2} = 18$$
$$6 + 6 + 6 = 18$$

$$3 \cdot 2 = 6$$
$$3 \cdot 3 = 9$$
$$3 \cdot 4 = \boxed{3 + 3} + \boxed{3 + 3} = 12$$
$$6 + 6 = 12$$
$$3 \cdot 5 = \boxed{3 + 3 + 3} + \boxed{3 + 3} = 15$$
$$9 + 6 = 15$$
$$3 \cdot 6 = \boxed{3 + 3 + 3} + \boxed{3 + 3 + 3} = 18$$
$$9 + 9 = 18$$
$$3 \cdot 7 = \boxed{3 + 3 + 3 + 3} + \boxed{3 + 3 + 3} = 21$$
$$12 + 9 = 21$$
$$3 \cdot 8 = \boxed{3 + 3 + 3 + 3} + \boxed{3 + 3 + 3 + 3} = 24$$
$$12 + 12 = 24$$
$$3 \cdot 9 = \boxed{3 + 3 + 3} + \boxed{3 + 3 + 3} + \boxed{3 + 3 + 3} = 27$$
$$9 + 9 + 9 = 27$$

Зазначимо, що від способу групування можна перейти до способу *послідовного множення*, який буде активно використовуватися в позатабличних випадках множення на кругле число.

Методику дослідження таблиці множення числа 5 див. за посиланням.

Отже, при відтворенні результатів таблиць множення учні можуть застосовувати такі способи:

1) спосіб на основі конкретного змісту арифметичної дії множення (множення можна замінити сумою однакових доданків);
2) на основі переставної властивості арифметичної дії множення (деякі добутки ми можемо не обчислювати, а, помінявши місцями множники, одержимо вже відомий добуток);
3) на основі знання попереднього чи наступного значення (у таблицях множення кожний наступний результат більший за попередній на визначене число, рівне першому множнику; кожний попередній результат менший від наступного на стільки ж одиниць);
4) спосіб групування доданків;
5) спосіб послідовного множення.

При узагальненні і систематизації таблиць множення є можливість здійснити пропедевтику ознак подільності на 2, 3, 5, 9.

Зокрема, досліджуючи результати таблиці множення числа 2, учні дізнаються, що числа, які діляться на 2, є парними. Звертаємо увагу учнів на цифри, які є останніми в записі результатів таблиці множення числа 2: 0, 2, 4, 6, 8 — це парні числа. Отже, числа, які закінчуються цифрами 0, 2, 4, 6, 8 (парними цифрами), є **парними числами**. Таким чином здійснюється пропедевтика ознаки подільності на 2.

> На 2 діляться ті й тільки ті числа,
> які закінчуються парною цифрою.

Досліджуючи результати таблиці множення числа 5, дізнаємося, що числа, які є результатами множення числа 5, закінчуються цифрами 0 або 5. З'ясовуємо, у яких випадках маємо наприкінці цифру 0; цифру 5. Таким чином відбувається пропедевтика ознаки подільності на 5.

> На 5 діляться ті й тільки ті числа,
> які закінчуються цифрою 0 або 5.

Цей висновок учні можуть використовувати для самоконтролю: якщо в результаті множення числа 5 чи на 5 одержали число, яке не закінчується 0 або 5, то допущено помилку.

Досліджуючи результати таблиці множення числа 3, пропонуємо учням знайти суму цифр, якими записуються двоцифрові добутки. Учні одержують числа, які повторюються, — 3, 6, 9; ці числа також є добутками таблиці множення числа 3, тобто ці числа діляться на 3. Отже, якщо сума цифр є числом, яке ділиться на 3, то й саме число ділиться на 3. Цей висновок є підставою для здійснення учнями самоперевірки — якщо в результаті множення на 3 одержано двоцифрове число, сума цифр якого не становить 3, 6 або 9, то допущено помилку. Таким чином здійснюємо пропедевтику ознаки подільності на 3.

> На 3 діляться ті й тільки ті числа,
> сума цифр яких ділиться на 3.

Аналогічно працюємо над результатами з таблиці множення числа 9. Знаходимо суму цифр, якими записано двоцифрові результати. Сума цифр усіх результатів дорівнює 9. Отже, в учнів є засіб перевірки одержаних при множенні з числом 9 результатів — якщо сума цифр двоцифрових результатів не дорівнює 9, то допущено помилку. Число 9 є результатом множення чисел 9 і 1, воно, очевидно, ділиться на 9. Таким чином відбувається пропедевтика ознаки подільності на 9.

> На 9 діляться ті й тільки ті числа,
> сума цифр яких ділиться на 9.

Сума цифр у двоцифрових добутках таблиці множення числа 9 дорівнює 9. Але виникає запитання щодо закономірності у визначенні цифри десятків. Якщо зіставити другий множник із таблиці множення числа 9 та кількість десятків у добутку, то бачимо, що кількість десятків на 1 менша за другий множник. Знаючи кількість десятків і розуміючи, що сума цифр має дорівнювати 9, легко встановити кількість одиниць у добутку.

Також із метою запам'ятовування результатів таблиць множення і пропедевтики вивчення піднесення числа до квадрата доцільно звернути увагу на результати множення однакових чисел.

Для пропедевтики розкладання чисел на прості множники, яке буде вивчатися в базовій школі, уже в початковій школі можна пропонувати завдання на подання числа у вигляді добутку двох чисел на підставі знання таблиць множення.

Отже, при відтворенні результатів таблиць множення учні можуть використовувати різні способи: або замінювати множення додаванням, або переставляти множники, або використовувати попереднє чи наступне значення таблиці, або спосіб групування, або спосіб послідовного множення, або ознаки подільності на 2, 5, 3, 9. Усі ці знання учні можуть застосувати при аналізі, а потім і при самостійному заповненні таблиці Піфагора.

УЗАГАЛЬНЕННЯ СПОСОБІВ СКЛАДАННЯ ТАБЛИЦЬ ДІЛЕННЯ

Таблиці ділення складаються на підставі взаємозв'язку арифметичних дій множення і ділення: якщо добуток двох чисел поділити на один множник, то отримаємо інший множник. Отже, з кожної рівності на множення можна скласти по дві рівності на ділення. Таблиці ділення можна складати за сталим дільником або за сталою часткою. Традиційно таблиці ділення складаються за сталим дільником.

Таблиці ділення не запам'ятовуються, а при встановленні табличних результатів міркування відбувається на підставі означення арифметичної дії ділення та знання відповідного випадку таблиці множення. Приклад складання таблиці ділення з числом 5 див. за посиланням.

Нагадаємо означення арифметичної дії ділення.

> Число a розділити на число b — це означає знайти таке число c, яке в добутку з дільником b дає число a:
> $a : b = c$, оскільки $c \cdot b = a$

2.1.2. Методика вивчення нумерації трицифрових чисел

Очікувані результати навчання здобувачів освіти див. за посиланням.

Наочний і дидактичний матеріал:

- лічильні палички — одиниці, пучки лічильних паличок — десятки, пучки лічильних паличок — сотні;
- кружки-намистинки — одиниці, низки кружків-намистинок — десятки, площинки кружків-намистинок — сотні;
- кубики — одиниці, бруски кубиків — десятки та площинки з кубиків — сотні;
- картки з розрядними числами;
- абак;
- таблиця розрядів.

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ПРО СОТНЮ ЯК ПРО СКЛАДЕНУ ЛІЧИЛЬНУ ОДИНИЦЮ

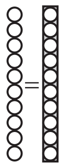
У концентрі «Сотня» діти ознайомилися з двома лічильними одиницями: одиницею і десятком (складеною лічильною одиницею). 10 окремих лічильних паличок — одиниць — зв'язували в пучок — десяток. Далі пучки-десятки рахували так само, як і прості одиниці. Або 10 окремих кружків-намистинок — одиниць — замінювали низкою з 10 кружків-намистинок — десятком — і рахували низки-десятки, як і прості одиниці. Аналогічно здійснюється ознайомлення з новою лічильною одиницею — сотнею.

Лічимо одиницями. 10 окремих лічильних паличок зв'язуємо в пучок і кажемо, що це 1 десяток; або 10 окремих намистинок-одиниць замінюємо низкою-десятком і записуємо: **10 одиниць = 1 десяток.**

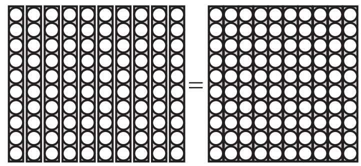
Лічимо десятками. Отримані 10 десятків — 10 пучків лічильних паличок — зв'язуємо у великий пучок — сотню; або 10 низок-десятків замінюємо площинкою-сотнею. Записуємо: **10 десятків = 1 сотня.**

Назву цієї лічильної одиниці учні вже знають. Вони розуміють, чому отримана лічильна одиниця називається сотнею: в 1 десятку 10 одиниць, а в 10 десятках 100 одиниць, або сотня. Записуємо: **100 одиниць = 1 сотня.**

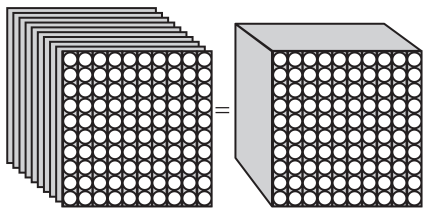
Лічимо сотнями так само, як рахували простими одиницями або десятками: 1 сотня, 2 сотні, ... , 10 сотень. Повідомляємо учням, що 10 сотень складають 1 тисячу. Записуємо: **10 сотень = 1 тисяча.**



10 од. = 1 д.



10 д. = 1 с.



10 с. = 1 т.

При лічбі сотнями використовуємо назву лічильної одиниці: 1 сотня, 2 сотні, 3 сотні... Можна відразу вводити і назви розрядних чисел: 1 сотня — 100, 2 сотні — 200, 3 сотні — 300... Назви цих чисел діляться на дві частини, причому перша частина слова вказує на кількість сотень, а друга частина слова — на те, що рахують сотнями.

Формуючи поняття про розряди, користуємось термінами: I розряд — розряд одиниць, II розряд — розряд десятків, III розряд — розряд сотень. Розглянемо назви розрядних чисел.

III розряд	II розряд	I розряд
сто	десять	один
дві*сті*	два*дцять*	два
три*ста*	три*дцять*	три
чотири*ста*	сорок	чотири
п’ят*сот*	п’ят*десят*	п’ять
шіст*сот*	шіст*десят*	шість
сім*сот*	сім*десят*	сім
вісім*сот*	вісім*десят*	вісім
дев’ят*сот*	дев’я*носто*	дев’ять

Отже, одиниці називаються одиницями I розряду, десятки — одиницями II розряду, сотні — одиницями III розряду.

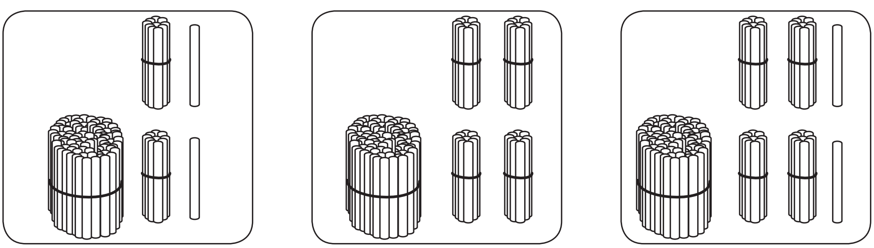
За аналогією знайомимо учнів зі способом утворення чисел розряду сотень шляхом прилічування однієї сотні.

		100 (сто)
$1+1=2$	$10+10=20$	$100+100=200$ (двісті)
$2+1=3$	$20+10=30$	$200+100=300$ (триста)
$3+1=4$	$30+10=40$	$300+100=400$ (чотириста)
$4+1=5$	$40+10=50$	$400+100=500$ (п'ятсот)
$5+1=6$	$50+10=60$	$500+100=600$ (шістсот)
$6+1=7$	$60+10=70$	$600+100=700$ (сімсот)
$7+1=8$	$70+10=80$	$700+100=800$ (вісімсот)
$8+1=9$	$80+10=90$	$800+100=900$ (дев'ятсот)
$9+1=10$	$90+10=100$	$900+100=1000$ (тисяча)

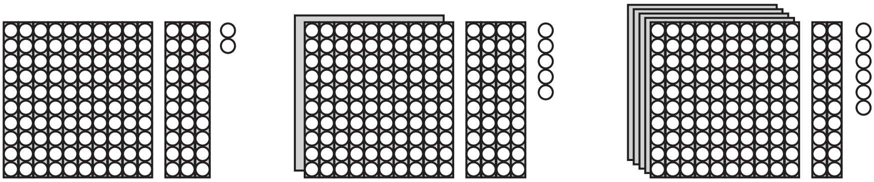
Учні переходять до назв: 2 сотні — двісті; 3 сотні — триста...

УТВОРЕННЯ ТРИЦИФРОВИХ ЧИСЕЛ

Після того як учні навчилися рахувати сотнями (називати не лише 2 сотні, але й двісті і т. д.) до тисячі, а також визначати, скільки одиниць або десятків в одній чи кількох сотнях, вони вчаться утворювати числа з 1 сотні і кількох одиниць; з 1 сотні, кількох десятків та кількох одиниць; з кількох сотень, кількох десятків та кількох одиниць. На перших етапах доцільно ілюструвати утворення чисел у межах 1000 у зіставленні з числами в межах 100, які містять таку саму кількість десятків та кількість одиниць.



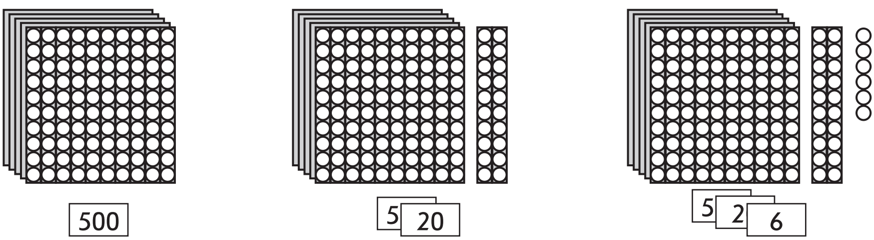
При формуванні в учнів уявлення про трицифрові числа певну увагу слід приділити конструюванню чисел за допомогою наочності — математичних матеріалів. Наприклад, для конструювання чисел можна взяти кружки-намистинки — одиниці, низки кружків-намистинок — десятки, площинки кружків-намистинок — сотні. Учні виконують вправи з математичними матеріалами, наприклад із кружками-намистинками, на утворення чисел із кількох сотень, кількох десятків та кількох одиниць, а також виконують обернені вправи: називають, скільки в заданому числі сотень, десятків та одиниць.



132 245 526

При конструюванні чисел звертаємо увагу на позначення відповідних розрядних чисел картками з числами, поступово накладаючи їх одна на одну.

Наприклад: покладіть на парту 5 площинок-сотень, позначте карткою з числом; покладіть 2 низки-десятки, позначте карткою з числом (накладіть цю картку на картку з числом сотень, починаючи з II розряду); покладіть 6 кружків-намистинок, позначте карткою з числом (накладіть цю картку на картку з числом десятків, починаючи з I розряду). Назвіть отримане число. [526] Скільки в цьому числі одиниць? Покажіть їх. Якою цифрою вони позначаються? Скільки в цьому числі десятків? Покажіть їх. Якою цифрою вони позначаються? Скільки сотень? Покажіть їх. Якою цифрою вони позначаються?



Називання трицифрових чисел має поєднуватись із вправами з лічби в заданих межах. Пропонуємо учням полічити. Задаємо такі межі, щоб перейти або через десяток, або через сотню: від 95 до 105; від 157 до 165... Звертаємо увагу на властивість відрізка натурального ряду чисел: кожне наступне число більше за попереднє на 1, а кожне попереднє — менше від наступного на 1.

СПОСОБИ УТВОРЕННЯ ТРИЦИФРОВИХ ЧИСЕЛ

Потрібно актуалізувати спосіб отримання чисел першої сотні прирахуванням одиниці до попереднього та відрахуванням одиниці від наступного числа, а потім перенести цей спосіб на числа в межах 1000, використовуючи терміни «попереднє число» та «наступне число». На цій підставі розглядаються випадки додавання числа 1 у межах першої сотні.

1. Утворіть число 728. Проілюструйте його кружками-намистинками; позначте картками з числами.

[Число 728 можна утворити з 7 сотень, 2 десятків та 8 одиниць ($728=700+20+8$); додавши до попереднього числа 727 число 1 ($728=727+1$) або віднявши від наступного числа 729 число 1 ($728=729-1$).]

Робота з конструювання чисел та позначення їх картками дає можливість не лише уявити розрядний склад чисел, а й створює умови для називання чисел шляхом поєднання назв розрядних одиниць, починаючи з вищого розряду.

Пропонуємо обернене завдання.

2. Скільки сотень, десятків та одиниць у числі 957? Позначте його картками з числами, проілюструйте кружками-намистинками.

У цьому випадку спочатку позначаємо число картками з числами, а потім ілюструємо кружками-намистинками.

Без наочних посібників аналогічне завдання звучить так.

3. Назвіть число, у якому 3 сотні, 2 десятки і 7 одиниць.

ЧИТАННЯ ТА ЗАПИС ТРИЦИФРОВИХ ЧИСЕЛ

Після того як у результаті конструювання чисел за допомогою математичних матеріалів учні усвідомили розрядний склад трицифрових чисел і називали числа, утворені із сотень, десятків та одиниць, переходимо до читання чисел, записаних у таблиці розрядів. Розглядаючи числа в таблиці розрядів, учні з'ясовують, скільки сотень, десятків та одиниць у кожному числі, і поступово називають розрядні числа кожного розряду, починаючи з вищого розряду — розряду тисяч. Потім учні називають числа за їх розрядним складом.

Найбільші труднощі являють собою числа, у яких відсутні одиниці або десятки, тому доцільні такі завдання.

1. Визначте на слух склад числа 560; 506...

2. Назвіть числа, у яких 7 сотень і 2 одиниці...

Запис чисел у межах 1000 також починаємо із запису в таблиці розрядів. Вправи поступово ускладнюються: спочатку число записують у таблиці розрядів за його розрядним складом (запишіть число, яке містить 8 сотень, 3 десятки і 2 одиниці), а потім — без визначення розрядного складу (запишіть число 645). Далі учні записують числа без таблиці розрядів; також спочатку за визначеним розрядним складом, а потім — без визначеного розрядного складу.

Учні вчаться встановлювати, що позначає кожна цифра в записі числа; скільки в заданому числі одиниць кожного розряду. Наприклад, у числі 627 цифра 7 позначає число одиниць, цифра 2 позначає число десятків, а цифра 6 — число сотень. У числі 627 у третьому розряді 6 одиниць, або 6 сотень, у другому розряді — 2 одиниці, або 2 десятки, а в першому — 7 одиниць.

Навчання встановленню **загальної кількості десятків, сотень і одиниць у числі** відбувається на підставі розгляду вправ.

Учні вже мають досвід заміни круглого числа більшими розрядними одиницями.

60 = 6 д.	У числі 60 усього 6 десятків.
200 = 20 д.	У числі 200 всього 20 десятків.
260 = 26 д.	У числі 260 усього 26 десятків.

Оскільки розряд десятків є другим розрядом, то для того щоб дізнатися про загальну кількість десятків у числі, потрібно закрити в ньому одну цифру справа; ліворуч залишиться загальна кількість десятків числа. Розряд сотень — третій розряд. Щоб дізнатися, скільки в числі сотень, потрібно прикрити в ньому дві цифри справа, щоб залишилося число лише третього розряду.

Число	Усього		
	сотень	десятків	одиниць
400	4	40	400
530	5	53	530
378	3	37	378

ПОДАННЯ ЧИСЛА У ВИГЛЯДІ СУМИ РОЗРЯДНИХ ДОДАНКІВ

Учні вже вміють подавати двоцифрові числа у вигляді суми розрядних доданків. За аналогією переносимо спосіб подання двоцифрового числа у вигляді суми розрядних доданків на трицифрові числа. Спочатку учні подають двоцифрове число у вигляді суми десятків та одиниць: $83 = 80 + 3$; з'ясовують, чому ця сума містить два доданки [тому що число 83 двоцифрове і містить два розряди]. Отже, двоцифрове число подається у вигляді суми двох розрядних доданків, де окремо подані десятки і окремо подані одиниці. З огляду на це робимо висновок, скільки розрядних доданків міститиме трицифрове число. [Трицифрове число розкладається на суму трьох розрядних доданків, тому що воно містить три розряди: сотні, десятки та одиниці.] Замінюємо сумою розрядних доданків число 483. [$483 = 400 + 80 + 3$.] Отже, сума, у якій окремо подано одиниці кожного розряду: сотні, десятки та одиниці, — називається **сумою розрядних доданків**.

Далі пропонується обернене завдання — записати число, яке подано сумою розрядних доданків: $100 + 30 + 5 = 135$. Аналогічні завдання не є складними для учнів, оскільки, вправляючись у конструюванні чисел і позначаючи числа картками з розрядними числами, вони фактично вже виконували цю дію. На цьому етапі потрібно лише зробити відповідний запис.

ПОРІВНЯННЯ ТРИЦИФРОВИХ ЧИСЕЛ

Порівнювати трицифрові числа можна двома способами. Наприклад, потрібно порівняти числа 235 та 236: число 235 при лічбі називається раніше, ніж число 236, тому $235 < 236$ — це спосіб порівняння *на підставі розташування чисел у натуральному ряді*.

Другий спосіб порівняння чисел — *порозрядне порівняння*. Наприклад, потрібно порівняти числа 205 та 250: порівняння починаємо з найвищого розряду — розряду сотень — у першому числі 2 сотні і в другому числі 2 сотні, сотень порівну; переходимо до розряду десятків — у першому числі 0 десятків, а в другому — 5 десятків, $0 < 5$, тому $205 < 250$.

Тут також можна застосувати аналогію з порівнянням двоцифрових чисел. Наприклад, учні порівнюють числа 34 та 45, а потім їм пропонується порівняти числа 234 та 245; 234 та 145. Таким чином ми утворюємо своєрідні зв'язки між вже відомим учням способом дії і нібито новим способом дії; привчаємо учнів «бачити» можливості перенесення відомого способу дії в нову ситуацію, коригуючи окремі його кроки.

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ КРУГЛИХ ЧИСЕЛ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ПРИЙОМУ УКРУПНЕННЯ РОЗРЯДНИХ ОДИНИЦЬ

Додавання та віднімання круглих трицифрових чисел із використанням прийому укрупнення розрядних одиниць вводиться на підставі аналогії з додаванням і відніманням круглих десятків, коли розрядні числа замінювали більшою лічильною одиницею — десятками — і виконували арифметичні дії з числами десятків, як із простими одиницями.

Пригадуємо спосіб міркування при додаванні та відніманні круглих чисел.

$60 + 30 = 6$ д. $+ 3$ д. $= 9$ д. $= 90$

$80 - 60 = 8$ д. $- 6$ д. $= 2$ д. $= 20$

Переносимо його на випадки додавання і віднімання круглих сотень.

$600 + 300 = 6$ с. $+ 3$ с. $= 9$ с. $= 900$

$800 - 600 = 8$ с. $- 6$ с. $= 2$ с. $= 200$.

Узагальнюємо спосіб міркування і формулюємо прийом укрупнення розрядних одиниць.

ПАМ'ЯТКА

Додавання і віднімання круглих чисел

Прийом укрупнення розрядних одиниць

1. Замінюю кожне число однаковими більшими розрядними одиницями.
2. $\frac{\text{Додаю}}{\text{Віднімаю}}$ числа розрядних одиниць.
3. Подаю результат в одиницях.

Наприклад: $700 - 400 = 7$ с. $- 4$ с. $= 3$ с. $= 300$

$400 + 300 = 4$ с. $+ 3$ с. $= 7$ с. $= 700$

МНОЖЕННЯ І ДІЛЕННЯ КРУГЛИХ ЧИСЕЛ

Прийом укрупнення розрядних одиниць

На попередньому етапі учні набули навичок табличного множення та ділення. З метою неперервного повторення і приросту компетентності можна ознайомити учнів із множенням круглого числа на одноцифрове, діленням круглого числа на одноцифрове, діленням круглого числа на кругле. Наприклад, пропонуємо учням записати таблицю множення числа 2; таблицю множення числа 20. Ставимо проблемне запитання: «Чи допоможе таблиця множення числа 2 знайти значення відповідних виразів із таблиці множення числа 20?» Учні помічають: якщо кругле число 20 замінити більшою розрядною одиницею — десятком, то ми зведемо таблицю множення числа 20 до відповідних випадків табличного множення числа 2. Далі з огляду на взаємозв'язок арифметичних дій множення та ділення складаємо таблиці ділення круглого числа на одноцифрове.

Таким чином ми переносимо прийом укрупнення розрядних одиниць на випадки множення та ділення круглого числа на одноцифрове. Більш докладно методику ознайомлення з множенням і діленням круглого числа на одноцифрове, а також методику ділення круглого числа на кругле див. за посиланням.

ПАМ’ЯТКА

$\dfrac{\textbf{Множення}}{\textbf{Ділення}}$ **круглого числа на одноцифрове**

Прийом укрупнення розрядних одиниць

1. Замінюю кругле число десятками (сотнями).
2. $\dfrac{\text{Множу}}{\text{Ділю}}$ число десятків (сотень) на одноцифрове число.

   Одержую десятки (сотні).
3. Результат записую в одиницях.

   Наприклад:

   $40 \cdot 2 = 4$ д. $\cdot 2 = 8$ д. $= 80$ $\quad$ $400 \cdot 2 = 4$ с. $\cdot 2 = 8$ с. $= 800$

   $40 : 2 = 4$ д. $: 2 = 2$ д. $= 20$ $\quad$ $400 : 2 = 4$ с. $: 2 = 2$ с. $= 200$

Множення та ділення числа на розрядну одиницю 10, 100

Учні вже знайомі з тим, що при множенні числа на 10 достатньо до цього числа справа дописати один нуль. Це правило можна перенести на випадки множення на 100. Оскільки в розрядній одиниці 100 два нулі, то при множенні на 100 достатньо до числа справа дописати два нулі. Аналогічно можна ввести правило ділення на 100: щоб поділити на 100 число, яке закінчується хоча б двома нулями, достатньо в записі цього числа справа прибрати два нулі.

Для випадків множення і ділення з круглими числами можливі й інші способи міркування. Наприклад, при множенні або діленні круглого числа на одноцифрове можна застосувати прийом, заснований на правилі множення/ділення добутку на число.

ПАМ’ЯТКА

$\dfrac{\textbf{Множення}}{\textbf{Ділення}}$ **круглого числа на одноцифрове**

Прийом, заснований на $\dfrac{\textit{множенні}}{\textit{діленні}}$ *добутку на число*

1. Замінюю кругле число добутком числа і розрядної одиниці.
2. $\dfrac{\text{Перемножую числа}}{\text{Ділю перший множник на дільник}}$.
3. Результат множу на розрядну одиницю.

   Наприклад:

   $40 \cdot 2 = (4 \cdot 10) \cdot 2 = (4 \cdot 2) \cdot 10 = 8 \cdot 10 = 80$

   $40 : 2 = (4 \cdot 10) : 2 = (4 : 2) \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20$

   $400 \cdot 2 = (4 \cdot 100) \cdot 2 = (4 \cdot 2) \cdot 100 = 8 \cdot 100 = 800$

   $400 : 2 = (4 \cdot 100) : 2 = (4 : 2) \cdot 100 = 2 \cdot 100 = 200$

Також на підставі правила множення/ділення числа на розрядну одиницю при множенні/діленні круглого числа на кругле число використовується прийом послідовного множення/ділення.

ПАМ'ЯТКА

$\dfrac{\textbf{Множення}}{\textbf{Ділення}}$ **на кругле число**

Прийом послідовного $\dfrac{\textit{множення}}{\textit{ділення}}$

1. Замінюю $\dfrac{\text{другий множник}}{\text{дільник}}$ добутком розрядної одиниці та числа.
2. $\dfrac{\text{Множу}}{\text{Ділю}}$ на $\dfrac{\text{число}}{\text{розрядну одиницю}}$.
3. $\dfrac{\text{Множу}}{\text{Ділю}}$ одержаний результат на інший множник.

Наприклад:

$4 \cdot 20 = 4 \cdot (2 \cdot 10) = (4 \cdot 2) \cdot 10 = 8 \cdot 10 = 80$

$4 \cdot 200 = 4 \cdot (2 \cdot 100) = (4 \cdot 2) \cdot 100 = 8 \cdot 100 = 800$

$90 : 30 = 90 : (10 \cdot 3) = (90 : 10) : 3 = 9 : 3 = 3$

$900 : 300 = 900 : (100 \cdot 3) = (900 : 100) : 3 = 9 : 3 = 3$

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ НА ПІДСТАВІ РОЗРЯДНОГО СКЛАДУ ЧИСЛА

Розкладати трицифрові числа на розрядні доданки учні вже вміють, тому далі вони виконують обернені завдання — замінюють суму розрядних доданків трицифровим числом. При заміні суми розрядних доданків трицифровим числом учні міркують так: $600 + 30 + 1$.

1. 600 — це 6 сотень, 30 — це 3 десятки, 1 — це 1 одиниця.
2. Число, що містить 6 сотень, 3 десятки та 1 одиницю — це число 631.

Далі учні ознайомлюються з випадками віднімання на підставі розрядного складу числа: $345 - 300$; $345 - 40$; $345 - 5$.

ПАМ’ЯТКА

Додавання і віднімання на підставі розрядного складу числа

1. Визначаю розрядний склад $\frac{\text{першого доданка}}{\text{зменшуваного}}$.
2. Визначаю розрядний склад $\frac{\text{другого доданка}}{\text{від'ємника}}$.
3. Читаю вираз зі словами «було», «$\frac{\text{додали}}{\text{відняли}}$», «отримали».
4. Записую (читаю) відповідь.

Наприклад:

853 – 50

1. 853 — це 8 сотень, 5 десятків та 3 одиниці;
2. 50 — це 5 десятків.
3. Було 8 сотень 5 десятків та 3 одиниці, відняли 5 десятків, отримали 8 сотень і 3 одиниці — це число 803.
4. 853 – 50 = 803.

2.1.3. Методика вивчення додавання і віднімання в межах 1000

УСНІ ПРИЙОМИ ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ В МЕЖАХ 1000

Прийоми обчислень, починаючи з концентра «Сотня», поділяють на *усні* і *письмові*. Ці прийоми схожі тим, що їх запис повинен здійснюватися письмово. Але усні прийоми записуються в рядок і обчислення починаються з найвищого розряду, а письмові записуються в стовпчик і обчислення починаються з нижчого розряду. Методичною помилкою є запис у рядок, а обчислення в стовпчик, і навпаки.

Очікувані результати навчання здобувачів освіти див. за посиланням.

Отже, при вивченні додавання і віднімання трицифрових чисел також ведеться робота з формування навичок усних обчислень у межах 100. Способи усних обчислень при додаванні і відніманні чисел у межах 100 див. за посиланням.

Варто зазначити, що в учнів уже сформовані такі прийоми обчислення: прийом укрупнення розрядних одиниць; прийом додавання та віднімання частинами; прийом додавання (віднімання), заснований на правилі додавання (віднімання) числа до (від) суми; порозрядне додавання та віднімання; прийом округлення.

Наводимо міркування при знаходженні значень виразів із використанням кожного з цих прийомів.

Прийом укрупнення розрядних одиниць

340 + 270 = 34 д. + 27 д. = 61 д. = 610

340 − 270 = 34 д. − 27 д. = 7 д. = 70

Перший доданок 340 і другий доданок 270 закінчуються одним нулем, тому замінюємо їх однаковими більшими розрядними одиницями — десятками: 34 д. та 27 д. Додаємо числа десятків: 34 д. + 27 д. = 61 д. Замінюємо число десятків одиницями: 61 д. = 610.

Зменшуване 340 та від'ємник 270 замінюємо однаковими більшими розрядними одиницями — десятками: 340 = 34 д., 270 = 27 д. Віднімаємо числа десятків: 34 д. − 27 д. = 7 д. Замінюємо число десятків одиницями: 7 д. = 70.

Прийом обчислення частинами

$$340 + \underbrace{270}_{200 + 70} = 540 + 70 = 610 \qquad 340 - \underbrace{270}_{200 + 70} = 140 - 70 = 70$$

$$340 + \underbrace{270}_{60 + 210} = 400 + 210 = 610 \qquad 340 - \underbrace{270}_{240 + 30} = 100 - 30 = 70$$

Другий доданок 270 замінюємо сумою розрядних доданків: 270 = 200 + 70. До першого доданка додаємо сотні: 340 + 200 = 540. До одержаного результату 540 додаємо десятки: 540 + 70 = 610.

Другий доданок 270 замінюємо сумою зручних доданків так, щоб доповнити перший доданок до найближчого розрядного числа: 270 = 60 + 210. Доповнюємо перший доданок до розрядного числа: 340 + 60 = 400. До одержаного результату 400 додаємо інший зручний доданок 210: 400 + 210 = 610.

Від'ємник 270 замінюємо сумою розрядних доданків: 270 = 200 + 70. Від зменшуваного 340 віднімаємо сотні: 340 − 200 = 140. Від одержаного результату 140 віднімаємо число десятків від'ємника: 140 − 70 = 70.

Від'ємник 270 подаємо у вигляді суми зручних доданків так, щоб зменшити зменшуване до розрядного числа: 270 = 240 + 30. Зменшуємо зменшуване до розрядного числа: 340 − 240 = 100. Від одержаного результату 100 віднімаємо інший зручний доданок: 100 − 30 = 70.

Прийом обчислення на підставі правила додавання числа до суми; віднімання числа від суми

$$340 + 270 = 570 + 40 = 610$$
$$300 + 40$$

$$340 - 270 = 30 + 40 = 70$$
$$300 + 40$$

$$340 + 270 = 310 + 300 = 610$$
$$310 + 30$$

$$340 - 270 = 0 + 70 = 70$$
$$70 + 270$$

Перший доданок 340 замінюємо сумою розрядних доданків: $340 = 300 + 40$. До сотень додаємо другий доданок: $300 + 270 = 570$. До одержаного результату 570 додаємо десятки першого доданка: $570 + 40 = 610$.

Перший доданок 340 замінюємо сумою зручних доданків так, щоб доповнити другий доданок до найближчого розрядного числа: $340 = 310 + 30$. Доповнюємо другий доданок до розрядного числа: $30 + 270 = 300$. До іншого зручного доданка 310 додаємо одержане число: $310 + 300 = 610$.

Зменшуване 340 подаємо у вигляді суми розрядних доданків: $340 = 300 + 40$. Від сотень віднімаємо від'ємник: $300 - 270 = 30$. До одержаного результату 30 додаємо десятки зменшуваного: $30 + 40 = 70$.

Зменшуване 340 замінюємо сумою зручних доданків, один із яких має стільки ж десятків, скільки і від'ємник: $340 = 70 + 270$. Від 270 віднімаємо від'ємник 270: $270 - 270 = 0$. Додаємо одержаний результат до іншого зручного доданка: $0 + 70 = 70$.

Прийом порозрядного обчислення

$$340 + 270 = 500 + 110 = 610$$
$$300 + 40 \quad 200 + 70$$

$$340 - 270 = 0 - 70 = 70$$
$$200 + 140 \quad 200 + 70$$

Перший доданок 340 подаємо у вигляді суми розрядних доданків: $340 = 300 + 40$. Другий доданок 270 подаємо у вигляді суми розрядних доданків: $270 = 200 + 70$. Додаємо сотні: $300 + 200 = 500$. Додаємо десятки: $40 + 70 = 110$. Додаємо одержані результати: $500 + 110 = 610$.

Перевіряємо, чи можна від десятків зменшуваного відняти десятки від'ємника: 40 менше від 70 — не можна. Тому зменшуване подаємо у вигляді суми зручних доданків, де перший доданок сотні, але на одну сотню менше, а другий — десятки та ще одна сотня: $340 = 200 + 140$. Від'ємник 270 замінюємо сумою розрядних доданків: $270 = 200 + 70$. Віднімаємо сотні: $200 - 200 = 0$. Віднімаємо десятки: $140 - 70 = 70$. Додаємо одержані результати: $0 + 70 = 70$.

Прийом округлення

$$\overset{300}{340 + 270} = 640 - 30 = 610 \qquad \overset{300}{340 - 270} = 40 + 30 = 70$$

Другий доданок 270 замінюємо близьким розрядним числом 300. До 340 додаємо 300: $340 + 300 = 640$; визначаємо, на скільки більше додали, — на 30. Від одержаного результату 640 віднімаємо 30: $640 - 30 = 610$.

Від'ємник 270 замінюємо близьким розрядним числом 300. Від 340 віднімаємо 300: $340 - 300 = 40$. Визначаємо, на скільки більше відняли, — на 30. До одержаного результату 40 додаємо 30: $40 + 30 = 70$.

Отже, усі усні прийоми обчислення, які були введені в концентрі «Сотня», реалізуються й у концентрі «Тисяча». Зазначимо, що підготовча робота до вивчення способів обчислення в концентрі «Тисяча» здійснюється на аналогічних випадках обчислення в межах 100.

ПИСЬМОВІ ПРИЙОМИ ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ В КОНЦЕНТРІ «ТИСЯЧА»

Письмове додавання і віднімання спирається на знання розрядного складу чисел, засвоєння співвідношення розрядних одиниць, міцні знання табличних випадків додавання і віднімання в межах 10 та 20. Тому перелічені знання й уміння повинні актуалізуватися на етапі підготовчої роботи до введення письмового прийому обчислення.

Для мотивації введення письмового прийому додавання трицифрових чисел пропонуємо учням знайти значення суми чисел, використовуючи усний прийом обчислення: $427 + 358$. До речі, такі випадки для усних обчислень учні не розглядали. Обидва доданки — трицифрові числа, кожне з яких можна подати у вигляді суми розрядних доданків, де окремо подані сотні, десятки та одиниці: $427 = 400 + 20 + 7$, $358 = 300 + 50 + 8$. При усних обчисленнях ми могли додавати числа порозрядно. Спробуємо і в цьому випадку виконати порозрядне додавання, починаючи з найвищого розряду — розряду сотень: сотні додаємо до сотень, десятки — до десятків, одиниці — до одиниць, а потім додаємо одержані суми.

$$427 + 358 = (400 + 20 + 7) + (300 + 50 + 8) =$$
$$= (400 + 300) + (20 + 50) + (7 + 8) = 700 + 70 + 15 = 785$$

Учні доходять висновку, що таке міркування дуже довге. Пропонуємо школярам іншу форму запису — стовпчиком —

і вводимо письмовий прийом додавання. Далі з'ясовуємо, чи можна міркувати так само при відніманні, і вводимо письмовий прийом віднімання.

ПАМ'ЯТКА

Письмове додавання і віднімання

1. Записую числа стовпчиком — розряд під розрядом.
2. Обчислення починаю з розряду одиниць. Виконую дії з одиницями.
3. Виконую дії з десятками.
4. Виконую дії з сотнями.

Пам'ятаю, що 10 одиниць нижчого розряду складають 1 одиницю вищого розряду

Знайдіть значення виразів письмово.

427 + 358 423 – 257

$$\begin{array}{r} 427 \\ +\underline{358} \\ 785 \end{array}$$

Розглянемо суму. Записуємо перший доданок 427. Під ним, починаючи з розряду одиниць, записуємо другий доданок: одиниці під одиницями, десятки під десятками, сотні під сотнями. Додавання починаємо з розряду одиниць: 7 од. + 8 од. = 15 од.; 15 од. — це 1 д. 5 од.; 5 од. пишемо під рискою в розряді одиниць, а 1 д. запам' ятовуємо — він переходить до десятків. Додаємо десятки: 2 д. + 5 д. = 7 д.; до одержаного результату додаємо ще 1 д.: 7 д. + 1 д. = 8 д.; підписуємо під рискою в розряді десятків. Переходимо до додавання сотень: 4 с. + 3 с. = 7 с.; записуємо 7 с. під рискою в розряді сотень. Читаємо результат.

$$\begin{array}{r} 423 \\ -\underline{257} \\ 166 \end{array}$$

Розглянемо різницю. Записуємо зменшуване 423. Під ним, починаючи з розряду одиниць, записуємо від'ємник 257: одиниці під одиницями, десятки під десятками, сотні під сотнями. Віднімання починаємо з розряду одиниць: від 3 од. не можна відняти 7 од., тому позичаємо 1 д.; 1 д. = 10 од.; до 10 од. додаємо 3 од.: 10 од. + 3 од. = 13 од.; від 13 од. віднімаємо 7 од.: 13 од. – 7 од. = 6 од.; записуємо під рискою в розряді одиниць. Переходимо до віднімання десятків: у зменшуваному було 2 д., 1 д. позичили, залишився 1 д.; від 1 д. не можна відняти 5 д., тому позичаємо 1 с.: 1 с. = 10 д.; до 10 д. додаємо 1 д.: 10 д. + 1 д. = 11 д.; від 11 д. віднімаємо 5 д.: 11 д. – 5 д. = 6 д.; записуємо під рискою в розряді десятків. Переходимо до віднімання сотень: було 4 с., позичили 1 с., залишилося 3 с.; від 3 с. віднімаємо 2 с. — 3 с. – 2 с. = 1 с.; записуємо під рискою в розряді сотень. Читаємо результат.

Традиційно додавання і віднімання вивчаються в такій послідовності:

1) додавання і віднімання без переходу через розряд;

$$+\begin{array}{r}234\\ \underline{425}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}469\\ \underline{246}\end{array}$$

2) додавання і віднімання, що зводиться до 10 одиниць;

$$+\begin{array}{r}235\\ \underline{425}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}540\\ \underline{126}\end{array}$$

3) додавання і віднімання з переходом через розряд одиниць;

$$+\begin{array}{r}237\\ \underline{526}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}542\\ \underline{126}\end{array}$$

4) додавання і віднімання, що зводяться до 0 десятків;

$$+\begin{array}{r}453\\ \underline{351}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}909\\ \underline{126}\end{array}$$

5) додавання і віднімання з переходом через розряд десятків.

$$+\begin{array}{r}529\\ \underline{299}\end{array}\qquad -\begin{array}{r}512\\ \underline{126}\end{array}$$

Певні труднощі становлять випадки віднімання від розрядного числа трицифрового числа.

Наприклад: $$-\begin{array}{r}900\\ \underline{542}\\ 358\end{array}$$

Наводимо міркування при обчисленні цього виразу.

9 сотень — це 8 сотень 9 десятків і 10 одиниць.

Або: від 0 од. не можна відняти 2 од., тому позичаємо 1 д.; але десятків немає, тому позичаємо 1 с. Замінюємо 1 с. на десятки: 1 с. = 10 д. Тепер ми можемо позичити 1 д. Позичаємо 1 д.: 1 д. = 10 од. Від 10 од. віднімаємо 2 од.: 10 од. – 2 од. = 8 од. — пишемо в розряді одиниць. Переходимо до десятків: було 10 д., позичили 1 д., залишилося 9 д. Від 9 д. віднімаємо 4 д.: 9 д. – 4 д. = 5 д. — пишемо в розряді десятків. Переходимо до сотень: було 9 с., позичили 1 с., залишилося 8 с. Від 8 с. віднімаємо 5 с.: 8 с. – 5 с. = 3 с. — пишемо в розряді сотень.

Письмові прийоми обчислення мають велике значення, тому що при письмовому обчисленні:

1) закріплюються навички табличного додавання і віднімання;
2) розвивається вміння міркувати з урахуванням письмової та усної нумерації;
3) засвоюються алгоритми.

2.1.4. Методика вивчення позатабличного множення і ділення

Наочний і дидактичний матеріал:

- набір геометричних фігур.

Усі випадки множення і ділення, що виходять за межі таблиць, умовно названі «позатабличними» і розглядаються на прикладі чисел у межах 100, а узагальнюються на числах у межах 1000.

Традиційно тема вивчається в такому порядку:

1) множення і ділення з числами 0, 1, 10, 100;
2) множення і ділення розрядного числа на одноцифрове число;
3) ділення числа на добуток; ділення виду $80:20$, $600:30$;
4) множення суми на число і числа на суму; множення виду $24 \cdot 3$, $4 \cdot 21$, $320 \cdot 3$;
5) ділення суми на число; ділення виду $39:3$, $72:6$;
6) перевірка ділення і множення; ділення виду $64:16$, $125:25$;
7) ділення з остачею.

Як бачимо, різноманітні випадки множення і ділення вводяться після вивчення відповідних властивостей арифметичних дій. Це обумовлено тим, що прийоми позатабличного множення і ділення побудовані на таких властивостях.

1) *Множення суми на число*

   Щоб помножити суму на число, достатньо кожний доданок помножити на це число, а потім додати одержані добутки:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

2) *Множення числа на суму*

   Щоб помножити число на суму, достатньо це число помножити на кожний доданок, а потім додати одержані добутки:

$$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$$

3) *Ділення суми на число*

   Щоб поділити суму на число, відмінне від нуля, достатньо кожний доданок поділити на це число, а потім додати одержані частки:

$$(a+b) : c = a : c + b : c, \; c \neq 0$$

4) *Ділення числа на добуток*

   Щоб поділити число на добуток, достатньо це число поділити на один із множників, а потім одержаний результат поділити на інший множник:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & a:b:c \\ a:(b \cdot c) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & a:c:b \end{tikzcd}$$

Зазначимо, що з множенням і діленням із числами 0, 1, 10, 100 учні вже знайомі. Докладніше про множення і ділення з числами 1 і 0 див. за посиланням.

Множення та ділення круглих чисел на одноцифрове число, а також ділення круглого числа на кругле було розглянуто при вивченні нумерації чисел у межах 1000. Докладніше див. за посиланням.

МНОЖЕННЯ СУМИ НА ЧИСЛО І ЧИСЛА НА СУМУ; МНОЖЕННЯ ВИДУ $24 \cdot 3$, $4 \cdot 21$, $320 \cdot 3$

Спочатку вводиться правило множення суми на число шляхом розв'язання задачі двома способами.

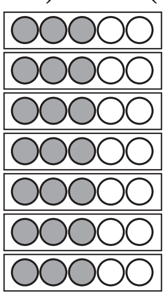
1. Розв'яжіть задачу двома способами.

Дівчинка складала букети. Для кожного букета вона брала 3 білих і 2 червоних троянди. Скільки всього троянд у 7 таких букетах?

Розв'язання:

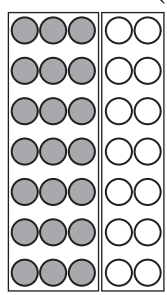
I спосіб

$(3+2) \cdot 7 = 35$ (тр.)



II спосіб

$3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 35$ (тр.)



Відповідь: 35 троянд у 7 букетах.

Сюжет задачі та способи її розв'язування можна проілюструвати за допомогою наочності.

I спосіб. Усього кругів у кожному ряді: $3+2$. Таких рядів 7. Отже, усього кругів: $(3+2) \cdot 7 = 35$.

II спосіб. Спочатку дізнаємося, скільки чорних кружків: $3 \cdot 7$; потім дізнаємося, скільки білих кружків: $2 \cdot 7$; і, нарешті, дізнаємося, скільки всього кружків: $3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 35$.

Маємо: $(3+2) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 35$.

Аналізуємо одержаний запис. Щоб знайти значення добутку другим способом, кожний доданок помножили на число і додали отримані добутки.

Щоб помножити суму на число, достатньо кожний доданок помножити на це число і додати одержані добутки:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Зазначимо, що правило множення суми на число є розподільним законом множення відносно додавання. Учитель у мовленні може користуватися обома цими назвами.

Закріплення правила множення суми на число (розподільного закону множення відносно додавання) здійснюється шляхом виконання завдань.

2. Знайдіть значення виразу різними способами: $(3+7)\cdot 4$.

3. Знайдіть значення виразу зручним способом: $(10+2)\cdot 8$.

4. Замініть суму добутків добутком числа і суми: $5\cdot 7+5\cdot 4$.

Подаємо міркування до завдання 4. Додаємо 7 разів число 5, а потім це число додаємо ще 4 рази, усього $(7+4)$ разів, можна записати: $5\cdot 7+5\cdot 4=5\cdot(7+4)$.

Аналогічно вводиться правило множення числа на суму і правило ділення суми на число (у наступній темі).

Можлива помилка — змішування двох властивостей: додавання суми до числа і множення суми на число. З метою її попередження доцільно порівняти відповідні рівності.

$(7+2)+3=(7+3)+2=10+2=12$

$(7+2)\cdot 3=7\cdot 3+2\cdot 3=21+6=27$

Також доцільно запропонувати учням виконати завдання типу «продовжити запис».

$8\cdot(10+2)=8\cdot 10+\ldots$ $\quad$ $8+(10+2)=(8+2)+\ldots$

Додаючи число до суми, додаємо до цього числа один із доданків і до отриманого результату додаємо інший доданок. При множенні числа на суму множимо число на кожний доданок і додаємо отримані добутки.

У подальшому навчанні правило множення суми на число застосовується при множенні двоцифрового числа на одноцифрове число. На підготовчому етапі слід актуалізувати вміння:

1) подавати число у вигляді суми розрядних доданків;
2) множити суму на число;
3) множити розрядне число на одноцифрове число.

Ознайомлення можна почати за допомогою конкретно-індуктивного методу на прикладі завдань.

5. Знайдіть значення добутків зручним способом.
$(10+2)\cdot 4$ $\quad$ $(30+7)\cdot 2$ $\quad$ $(40+1)\cdot 2$

6. Порівняйте добутки з попередніми. Знайдіть значення добутків.
$12\cdot 4$ $\quad$ $37\cdot 2$ $\quad$ $41\cdot 2$

Зіставляємо добутки у завданнях 5 і 6 по стовпчиках і з'ясовуємо, чим вони схожі [у кожній парі однакові другі множники]; чим вони відрізняються [у першому виразі кожної пари перший доданок поданий сумою, а в другому виразі кожної пари — двоцифровим числом]. Запитуємо учнів, як вони міркували, обчислюючи перші добутки кожної пари, і чи можна міркувати так само при обчисленні других добутків. Пропонуємо визначити, що потрібно зробити спочатку. [Спочатку двоцифровий множник потрібно подати у вигляді суми розрядних доданків.] Лише після цього пропонуємо знайти значення других добутків. Запитуємо, як потрібно міркувати. Пропонуємо визначити, що ми зробили першим кроком; другим кроком; третім кроком. Після цього пропонуємо порівняти складений алгоритм із пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Множення двоцифрового числа на одноцифрове

Прийом, заснований на множенні суми на число

1. Замінюю двоцифрове число сумою розрядних доданків.
2. Множу кожний доданок на одноцифрове число.
3. Додаю одержані добутки.
4. Називаю результат.

Наприклад:

$24 \cdot 3 = (20 + 4) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 60 + 12 = 72$

З метою формування обчислювальної навички учні вправляються в множенні двоцифрового та трицифрового чисел на одноцифрове. Наступним кроком є ознайомлення з множенням одноцифрового числа на двоцифрове на підставі застосування переставного закону множення.

$3 \cdot 28 = 28 \cdot 3 = (20 + 8) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 60 + 24 = 84$

Множення одноцифрового числа на двоцифрове або трицифрове число можна здійснити також на підставі правила множення числа на суму.

ПАМ'ЯТКА

Множення одноцифрового числа на двоцифрове

Прийом, заснований на множенні числа на суму

1. Замінюю двоцифрове число сумою розрядних доданків.
2. Множу одноцифрове число на кожний доданок.
3. Додаю одержані добутки.
4. Називаю результат.

Наприклад:

$3 \cdot 24 = 3 \cdot (20 + 4) = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 4 = 60 + 12 = 72$

Далі опрацьовуємо вміння множити кругле число на одноцифрове способом на підставі укрупнення розрядних одиниць у поєднанні з прийомом множення двоцифрового числа на одноцифрове.

$320 \cdot 3 = 32$ д. $\cdot 3 = 96$ д. $= 960$

Виконати обчислення можна також на підставі правила множення суми на число.

$320 \cdot 3 = (300 + 20) \cdot 3 = 300 \cdot 3 + 20 \cdot 3 = 900 + 60 = 960$

ДІЛЕННЯ СУМИ НА ЧИСЛО; ДІЛЕННЯ ВИДУ 39 : 3, 72 : 6

Методика роботи аналогічна методиці введення і опрацювання правила множення суми на число. Шляхом виконання вправ із математичними матеріалами та розв'язування задач двома способами вводиться правило ділення суми на число, або розподільний закон ділення відносно додавання.

> Щоб поділити суму на число, відмінне від нуля,
> достатньо кожний доданок поділити на це число,
> а потім додати одержані частки:
> $(a + b) : c = a : c + b : c,\ c \neq 0$

На підставі цього правила виконується ділення двоцифрового числа на одноцифрове. Тут можливі два випадки:

1) коли ділене замінюють сумою розрядних доданків, кожний із яких ділиться на дільник;
2) коли ділене замінюють сумою зручних доданків, кожний із яких ділиться на дільник.

Методика ознайомлення з діленням двоцифрового числа на одноцифрове полягає в тому, що учням пропонується спочатку знайти значення частки $(30 + 9) : 3$, а потім з'ясувати, як попередні обчислення можна застосувати для знаходження частки чисел 39 та 3. Далі надається зразок дій і повна ООД. Діти вчаться застосовувати її при обчисленні.

Традиційно на наступному етапі вводиться новий випадок ділення двоцифрового числа на одноцифрове, коли ділене потрібно подати у вигляді суми зручних доданків.

На підготовчому етапі слід актуалізувати вміння:

1) виділяти двоцифрові розрядні числа, які можна поділити на 2 (20, 40, 60, 80), на 3 (30, 60, 90) тощо;
2) подавати двоцифрове число у вигляді суми двох доданків, кожний із яких ділиться на певне число; заміняти число сумою зручних доданків;
3) ділити суму на число.

Ознайомлення з новим випадком ділення двоцифрового числа на одноцифрове слід розпочати зі створення проблемної ситуації. З цією метою пропонуємо учням спочатку знайти значення частки чисел 36 та 3. Запитуємо, як потрібно міркувати. Після цього ставимо проблемне запитання: «Чи можна міркувати так само при знаходженні значення частки чисел 42 і 3?» Учні зазначають, що в цьому випадку так міркувати не можна. Число 42 можна подати у вигляді суми розрядних доданків 40 і 2, але 40 на 3 не ділиться і 2 на 3 не ділиться. Пропонуємо учням визначити, що в способі міркування нас не влаштовує. Учні зазначають, що ділене 42 не потрібно заміняти сумою розрядних доданків; його слід замінити сумою таких чисел, кожне з яких ділиться на дільник. Така сума називається сумою зручних доданків. Після цього пропонуємо учням замінити ділене 42 сумою зручних доданків і виконати ділення.

$42 : 3 = (30 + 12) : 3 = 30 : 3 + 12 : 3 = 10 + 4 = 14$

Після виконання завдання запитуємо учнів, як потрібно міркувати, і пропонуємо розказати, що слід зробити на кожному кроці розв'язання. Складений алгоритм розв'язання пропонуємо порівняти з пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Ділення двоцифрового числа на одноцифрове число

Прийом, заснований на діленні суми на число

1. Замінюю ділене сумою доданків — таких, щоб кожний доданок ділився на дільник націло.
2. Ділю кожний доданок на дільник.
3. Додаю одержані частки.

Наприклад:

$39 : 3 = (30 + 9) : 3 = 30 : 3 + 9 : 3 = 10 + 3 = 13$

$42 : 3 = (30 + 12) : 3 = 30 : 3 + 12 : 3 = 10 + 4 = 14$

Потрібно звернути увагу учнів на підбір зручних доданків, де перший доданок — це дільник, збільшений в 10, або в 20, або в 30... разів, а другий доданок — це те, що залишилося від діленого.

Уміння виконувати ділення в усіх перелічених випадках закріплюється шляхом виконання завдань.

1. Закінчіть обчислення: $81 : 3 = (60 + 21) : 3 = \dots$.
2. Виконайте ділення, розклавши ділене на зручні доданки.
   $96 : 2$ $\quad$ $90 : 5$

З метою формування обчислювальних навичок ділення двоцифрового та трицифрового чисел на одноцифрове слід пропонувати учням достатню кількість відповідних вправ.

На наступному етапі навчання розглядаються випадки ділення розрядного числа на одноцифрове, коли не можна застосувати спосіб укрупнення розрядних одиниць. У цих випадках міркуємо, використовуючи прийом ділення суми на число.

$50 : 2 = (40 + 10) : 2 = 40 : 2 + 10 : 2 = 20 + 5 = 25$

ПЕРЕВІРКА ДІЛЕННЯ І МНОЖЕННЯ; ДІЛЕННЯ ВИДУ 64:16, 125:25

Учні вже знають означення арифметичної дії ділення.

> Число a поділити на число b — це означає знайти таке число c, яке в добутку з числом b дає число a:
>
> $a : b = c$, оскільки $c \cdot b = a$

У цьому означенні приховується і спосіб перевірки правильності виконання арифметичної дії ділення. Якщо значення частки, помножене на дільник, не дорівнює діленому, то дію ділення виконано неправильно.

Учні вчаться перевіряти ділення множенням.

Наприклад, $84 : 6 = 14$, $14 \cdot 6 = 84$ — у результаті множення значення частки на дільник отримали число, яке дорівнює діленому, отже, ділення виконано правильно.

Потім вводиться перевірка множення. Для перевірки правильності виконання арифметичної дії множення спираємось на взаємозв'язок арифметичних дій множення і ділення.

> Якщо добуток двох множників поділити на один множник, то одержимо інший множник:
>
> $$\begin{tikzcd} & c : a = b \\ a \cdot b = c \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & c : b = a \end{tikzcd}$$

Отже, якщо після ділення добутку на один із множників не отримали інший множник, то в обчисленнях допущено помилку.

Учні вчаться перевіряти множення діленням.

Наприклад, $18 \cdot 5 = 90$, $90 : 5 = 18$ — у результаті ділення добутку на другий множник отримали число, яке дорівнює першому множнику, отже, множення виконано правильно.

Ділення круглого числа на кругле. Прийом, заснований на означенні арифметичної дії ділення

Знайти значення частки круглих чисел можна з використанням або прийому укрупнення розрядних одиниць, або прийому послідовного ділення, або можна застосувати спосіб, заснований на означенні арифметичної дії ділення, — спосіб добору.

Наприклад, $80:20$. 80 розділити на 20 — це означає знайти таке число, яке при множенні на дільник дає ділене. Це число шукатимемо способом добору.

Випробовування починаємо з числа 2, оскільки при множенні на 1 одержимо те саме число.

Випробовуємо число 2. $2 \cdot 20 = 40$, $40 \neq 80$, тому число 2 не підходить.

Випробовуємо число 3. $3 \cdot 20 = 60$, $60 \neq 80$, тому число 3 не підходить.

Випробовуємо число 4. $4 \cdot 20 = 80$, $80 = 80$, тому число 4 підходить.

$80 : 20 = 4$, тому що $4 \cdot 20 = 80$.

ПАМ'ЯТКА

Ділення розрядного числа на розрядне

Спосіб добору

1. Шукаю число, яке при множенні на дільник дає ділене:
   1) випробовую число 2: множу 2 на дільник, результат порівнюю з діленим; якщо отриманий добуток дорівнює діленому, то 2 є часткою; якщо ні, то продовжую випробовування;
   2) випробовую число 3; число 4..., поки в добутку не отримую число, що дорівнює діленому.
2. Роблю висновок.

Наприклад:

$\underline{120} : 40 = 3$, тому що $3 \cdot 40 = 120$.

$2 \cdot 40 = 80$, $80 \neq 120$;

$3 \cdot 40 = 120$, $120 = 120$.

Ділення на двоцифрове число. Прийом на основі означення дії ділення (спосіб добору)

Ознайомлення з діленням двоцифрового числа на двоцифрове здійснюється способом добору. Варто зазначити, що зі способом добору діти ознайомились при вивченні ділення розрядного числа на розрядне, тому відомий їм спосіб міркування слід перенести в нову навчальну ситуацію. З цією метою пропонуємо учням знайти значення частки чисел 60 і 30 способом добору. Після виконання завдання просимо учнів розповісти, як вони міркували. [60 поділити на 30 — це означає знайти таке число, яке при множенні на 30 дає 60. Будемо шукати його способом добору: випробовуємо число 2: множимо 2 на дільник, порівнюємо результат із діленим...] Після цього ставимо проблемне запитання: «Чи можна міркувати так само при обчисленні частки чисел 64 та 16?» [Можна. 64 поділити на 16 — це означає знайти таке число, яке при множенні на 16 дає 64. Це число будемо шукати випробовуванням. Починаємо випробовувати числа, починаючи з числа 2...] У ході пояснення міркування учні доходять висновку, що випробовувати всі числа, починаючи з числа 2, незручно. Пропонуємо їм раціональний спосіб добору значення частки.

Знайомимо учнів із раціональним способом добору, застосовуючи прикидку.

$64 : 16 = \square$, $\square \cdot 16 = 64$

Спосіб прикидки. Шукаємо таке число, яке при множенні на одиниці дільника (6) дає результат, що закінчується одиницями діленого (4). При множенні 4 на 6 у результаті отримаємо число 24, воно закінчується цифрою 4. З'ясовуємо, чи є інші такі числа. [Є, це число 9.] Випробовуємо числа 4 і 9: $4 \cdot 16 = 64$; $9 \cdot 16 = 144$. Висновок: 4 є часткою чисел 64 та 16.

ПАМ'ЯТКА

Ділення на двоцифрове число

Спосіб прикидки

Розділити число a на число b означає знайти таке число c, яке в результаті множення на дільник b дає ділене a:

$a : b = c$, оскільки $c \cdot b = a$

1. Число с (значення частки) шукаю добором, використовуючи прикидку:
   - шукаю таке число, яке при множенні на одиниці дільника дає результат, що закінчується одиницями діленого; записую це число;
   - думаю, чи є ще такі числа; записую їх;
   - випробовую множенням записані числа.
2. Роблю висновок.

   Наприклад:

   $51 : 17 = \square$, тому що $\square \cdot 17 = 51$

   3 — ?

   $3 \cdot 17 = 51$, $51 = 51$

   $51 : 17 = 3$, тому що $3 \cdot 17 = 51$

Прийом на підставі правила ділення числа на добуток

На цьому етапі пропонуємо учням розглянути можливі способи обчислення.

I спосіб: $24 : (3 \cdot 2) = 24 : 6 = 4$.

II спосіб: $24 : (3 \cdot 2) = (24 : 3) : 2 = 8 : 2 = 4$.

Після коментування другого способу обчислення формулюємо правило.

> **Щоб поділити число на добуток, достатньо це число поділити на один із множників, а потім одержаний результат поділити на інший множник:**
>
> $$a : (b \cdot c) \begin{matrix} \nearrow a : b : c \\ \searrow a : c : b \end{matrix}$$

З метою створення проблемної ситуації учням пропонуємо знайти значення виразу $72 : (9 \cdot 2)$ двома способами. Тут учні стикаються з тим, що міркувати за першим способом складніше, ніж за другим.

Ознайомлення із прийомом послідовного ділення

I варіант методики — конкретно-індуктивна.

Пропонуємо учням знайти значення частки $48 : (8 \cdot 2)$ зручним способом. Після цього пропонуємо порівняти частку $48 : 16$ з попередньою і визначити, чим вони відрізняються. [У першій частці дільник поданий добутком чисел 8 та 2; а в другій — числом 16.] Запитуємо учнів, чи можна під час обчислення другої частки міркувати так само, як і в попередньому випадку, і що для цього спочатку потрібно зробити. Після проведеної роботи пропонуємо учням знайти значення часток чисел 72 і 36; 64 і 16; 80 і 40. Просимо учнів пояснити свій спосіб міркування і розказати, що вони робили на кожному кроці обчислення.

II варіант методики спирається на те, що учні вже застосовували прийом послідовного ділення при діленні круглого числа на кругле. Пригадуємо ООД послідовного ділення круглого числа на кругле і діємо за аналогією при діленні на двоцифрове число.

Тому пропонуємо учням завдання: серед усіх випадків ділення двоцифрового числа на двоцифрове окремо виділити випадки ділення розрядного числа на розрядне: $60 : 20$; $64 : 16$;

$900:300$; $100:20$; $60:30$; $80:40$. Це можна зробити, виключивши зайву частку.

Зайвою є частка чисел 64 та 16, тому що в усіх інших частках і ділене, і дільник — круглі числа, а в цій ні. При знаходженні значень часток круглих чисел кожний дільник слід подати у вигляді добутку розрядної одиниці і числа. Але число 16 не можна подати у вигляді добутку розрядної одиниці і числа, тому подаємо його у вигляді добутку двох одноцифрових чисел.

Отже, щоб поділити на двоцифрове число, достатньо це число замінити добутком двох чисел і послідовно розділити на кожний із цих множників. Цей прийом називається прийомом послідовного ділення. Для його засвоєння учнями слід опрацювати вміння:

1) розкладати двоцифрове число на два множники:
$36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9$;
2) застосовувати правило ділення числа на добуток.

Потрібно звернути увагу на подання дільника у вигляді добутку зручних множників: першим повинно бути найбільше число, на яке ділиться дільник за таблицями ділення.

ПАМ'ЯТКА

Ділення на двоцифрове число

Прийом послідовного ділення

1. Замінюю дільник добутком зручних множників.
2. Ділю на більший множник.
3. Ділю одержаний результат на інший множник.

Наприклад:

$54:18 = 54:(9 \cdot 2) = (54:9):2 = 6:2 = 3$

$90:30 = 90:(10 \cdot 3) = (90:10):3 = 9:3 = 3$

ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ

Конкретний зміст ділення з остачею розкривається при розв'язуванні задач на ділення на вміщення з використанням математичних матеріалів — набору геометричних фігур: учні впевнюються, що не завжди можна виконати розбиття множини на рівночисельні підмножини і що в таких випадках операція розбиття пов'язується з дією ділення з остачею.

Розв'яжіть задачу.

Дівчинка поставила в склянки 20 кольорових олівців, по 6 олівців у кожну склянку. Скільки склянок з олівцями отримала дівчинка?

Це задача на конкретний зміст дії ділення на вміщення, тому учні відразу можуть записати її розв'язання: 20 : 6. Але знайти значення цієї частки вони не можуть, тому що не існує такого числа, яке при множенні на 6 дає 20. Складається проблемна ситуація. Учитель пропонує її вирішення засобом практичних дій.

Наводимо методику виконання цього завдання.

Скільки потрібно взяти олівців, щоб покласти їх у першу склянку? [6] Візьміть 6 олівців і покладіть їх у першу склянку.

Чи всі олівці ми розклали? [Ні, не всі.]

Візьміть ще стільки олівців, щоб покласти їх у другу склянку. Скільки потрібно взяти олівців? [6] Візьміть 6 олівців і покладіть їх у другу склянку.

Чи всі олівці ми розклали? [Ні, не всі.]

Візьміть ще стільки олівців, щоб покласти їх у третю склянку. Скільки потрібно взяти олівців? [6] Візьміть 6 олівців і покладіть їх у третю склянку.

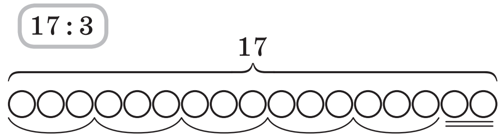
Чи всі олівці ми розклали? [Ні, залишилися ще 2 олівці.] Чи можна їх покласти в четверту склянку? [Ні, тому що потрібно розкладати по 6 олівців у кожну склянку, а в нас лише 2.]

Скільки ми отримали склянок з олівцями? [3 склянки, по 6 олівців у кожній.]

Скільки олівців залишилося? [Залишилося 2 олівці.]

Розв'язати цю задачі можна так: 20 : 6 = 3 (ост. 2) — ми виконали ділення з остачею; тут 20 — ділене, 6 — дільник, 3 — частка, 2 — остача. Цей запис читають так: 20 поділити на 6 — у частці буде 3 і в остачі 2.

Після ознайомлення з дією ділення з остачею учні виконують ділення з остачею, спираючись на практичні дії.



Також учні порівнюють рівності ділення націло і ділення з остачею.

12 : 3 = 4	16 : 4 = 4	10 : 5 = 2
13 : 3 = 4 (ост 1)	18 : 4 = 4 (ост. 2)	13 : 5 = 2 (ост. 3)

Учні доходять висновку: в остачі отримуємо число, яке показує, на скільки ділене більше за число, яке ділиться на дільник націло, а в частці отримуємо те саме число, що й при діленні націло.

На наступному уроці учні ознайомлюються з алгоритмом ділення з остачею.

ПАМ'ЯТКА

Ділення з остачею

1. Називаю всі числа, які менші від діленого і діляться на дільник націло.
2. Найбільше з цих чисел ділю на дільник і результат записую в частці.
3. Віднімаю від діленого знайдене найбільше число — отримую остачу. Записую остачу в дужках.

Наприклад: $16 : 3 = 5$ (ост. 1)
1) 3, 6, 9, 12, <u>15</u>;
2) $15 : 3 = 5$ — це неповна частка;
3) $16 - 15 = 1$ — це остача.

Розглядаючи різноманітні випадки ділення з остачею, учні роблять висновок, що остача повинна бути меншою за дільник. Від цього моменту, виконавши ділення з остачею, учні перевіряють, чи отримана остача є меншою за дільник. Якщо остача більша за дільник, то ділення можна продовжити.

Також на цьому уроці можна звернути увагу учнів на залежність між дільником і кількістю остач: кількість остач (включаючи нуль) дорівнює дільнику. Отже, при діленні на 3 можуть бути три остачі: 0, 1, 2; при діленні на 7 — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

З перевіркою ділення з остачею учні ознайомляться пізніше, вона здійснюється за алгоритмом.

ПАМ'ЯТКА

Перевірка ділення з остачею

1. Множу одержану неповну частку на дільник.
2. Додаю до одержаного добутку остачу.
3. Порівнюю знайдене число з діленим: якщо це число дорівнює діленому, то ділення з остачею виконано правильно.
Наприклад: $23 : 5 = 4$ (ост. 3)
Перевірка: 1) $4 \cdot 5 = 20$; 2) $20 + 3 = 23$; 3) $23 = 23$;
або: $4 \cdot 5 + 3 = 23$.

Останній запис також можна прочитати так: при діленні 23 на 5 у частці отримуємо 4, а в остачі 3. Крім того, цей запис можна прочитати ще й так: при діленні 23 на 4 у частці отримуємо 5, а в остачі 3.

Запис $3 \cdot 5 + 4 = 19$ можна прочитати лише одним способом: при діленні 19 на 5 у частці отримуємо 3, а в остачі 4 (якщо спробуємо прочитати цей запис другим способом, то остача буде більшою за дільник, що є неможливим).

Отже, учні повинні навчитися виконувати та перевіряти ділення з остачею за алгоритмами.

2.2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ НУМЕРАЦІЇ ЧИСЕЛ ТА АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ ІЗ ЧИСЛАМИ В 4 КЛАСІ

Зміст навчання математики в 4 класі будується від навчання учнів письмового множення та ділення, яке розгортається спочатку в концентрі «Тисяча», а потім переноситься на багатоцифрові числа.

Методику узагальнення і систематизації нумерації чисел у межах 1000 на початку навчального року див. за посиланням.

Методику узагальнення і систематизації знань учнів щодо арифметичних дій додавання і віднімання, множення і ділення див. за посиланням.

Методику узагальнення і систематизації прийомів додавання і віднімання чисел у межах 1000 див. за посиланням.

Основою для ознайомлення учнів із письмовими прийомами множення і ділення є гарні обчислювальні навички позатабличного множення та ділення. Методику узагальнення і систематизації прийомів позатабличного множення та ділення див. за посиланням.

2.2.1. Методика вивчення письмового множення трицифрового числа на одноцифрове

Традиційно письмові прийоми множення та ділення вводяться на початку навчального року в 4 класі на матеріалі чисел у межах 1000. Існують підручники, у яких письмові прийоми вводяться в межах багатоцифрових чисел. Але, враховуючи складність ООД (особливо прийому письмового ділення) та з метою розтягнення процесу формування вміння письмового множення та ділення, вважаємо за доцільне здійснити ознайомлення з письмовим множенням і діленням на матеріалі трицифрових чисел.

На етапі підготовчої роботи до введення прийому письмового множення слід актуалізувати:

1) конкретний зміст арифметичної дії множення: $17 \cdot 3 = 17 + 17 + 17 = 51$;
2) окремі випадки множення: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
3) множення розрядних чисел на одноцифрове число: $600 \cdot 2 = 6$ с. $\cdot 2 = 12$ с. $= 1200$;
4) властивість множення суми на число і алгоритм множення двоцифрового числа на одноцифрове: $17 \cdot 4 = (10 + 7) \cdot 4 = 10 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 40 + 28 = 68$.

ОЗНАЙОМЛЕННЯ З ПИСЬМОВИМ ПРИЙОМОМ МНОЖЕННЯ

Введення нового прийому слід мотивувати. Для цього учням пропонується знайти значення добутку, використовуючи усний прийом.

$$213 \cdot 3 = (200 + 10 + 3) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 600 + 30 + 9 = 639$$

Учні доходять висновку, що такий спосіб міркування дуже довгий, і вчитель пропонує їм інший прийом обчислення — письмовий.

$$\begin{array}{r} \times\, 213 \\ 3 \\ \hline 639 \end{array}$$

ПАМ'ЯТКА

Письмове множення на одноцифрове число

1. Записую числа стовпчиком: другий множник пишу під одиницями першого множника.
2. Множення починаю з розряду одиниць. Множу одиниці першого множника на другий множник. Одержую одиниці. Результат записую під одиницями.
3. Множу десятки першого множника на другий множник. Одержую десятки. Результат записую під десятками.
4. Множу сотні першого множника на другий множник. Одержую сотні. Результат записую під сотнями.
5. Читаю значення добутку.

Пам'ятаю, що 10 одиниць нижчого розряду утворюють 1 одиницю вищого розряду.

Можна при мотивації дати складніший випадок обчислення.

Корисно порівняти усний та письмовий прийоми множення. При усному множенні множення починаємо з найвищого розряду, а при письмовому — навпаки, з нижчого. При усному множенні розв'язок записуємо в рядок, а при письмовому — у стовпчик.

Традиційно спочатку опрацьовуються випадки множення двоцифрового числа на одноцифрове число без переходу через розряд. Учням пропонуються вирази на письмове множення, у яких множники вже записані стовпчиком, а потім діти самі повинні записати числа стовпчиком і виконати розгорнені міркування.

У подальшому навчанні учні ознайомляться з випадками множення з переходом через розряд десятків. Можна запропонувати учням два випадки множення для порівняння. Спочатку учні множать 31 на 6, а потім їм пропонується проблемне завдання: знайти значення добутку чисел 37 і 6. У цьому випадку при множенні 7 одиниць на 6 одиниць ми отримуємо 42 одиниці — це 4 десятки та 2 одиниці; під одиницями записуємо 2, а 4 десятки запам'ятовуємо.

$$\begin{array}{r} \\ \times\ 31 \\ 6 \\ \hline 186 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 4} \\ \times\ 37 \\ 6 \\ \hline 222 \end{array}$$

Переносимо ООД на випадки множення трицифрового числа на одноцифрове. Для цього пропонуємо учням знайти добуток чисел 27 і 3, використовуючи письмовий прийом обчислення. Запитуємо, чи допоможе отриманий розв'язок знайти добуток чисел 127 і 3. Учні доходять висновку, що в другому добутку змінився лише перший множник: у числі 127 такі самі одиниці і десятки, але ще є 1 сотня. Тому залишилося лише помножити сотні першого множника на другий множник.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ \times\ 27 \\ 3 \\ \hline 81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ \times\ 127 \\ 3 \\ \hline 381 \end{array}$$

Далі пропонуються випадки множення трицифрових чисел на одноцифрові, коли є перехід через розряд сотень: $182 \cdot 3$; $151 \cdot 6$. І лише після цього розглядаються випадки множення трицифрових чисел на одноцифрові, коли є два переходи через розряд: $164 \cdot 4$, $268 \cdot 3$. Певне місце належить випадкам множення, коли в середині запису трицифрового числа є нуль: $207 \cdot 4$.

Зазначимо, що від розгорнених міркувань із промовлянням назв розрядів, які множаться і які отримуються, переходимо до скорочених міркувань, коли опускаються назви розрядних одиниць.

ПАМ'ЯТКА

Письмове множення на одноцифрове число

1. Записую числа стовпчиком.
2. Множення починаю з розряду одиниць. Множу одиниці кожного розряду першого множника на другий множник.
3. Читаю відповідь.

Пам'ятаю, що 10 одиниць нижчого розряду складають 1 одиницю вищого розряду.

2.2.2. Методика вивчення письмового ділення трицифрового числа на одноцифрове

Письмове ділення — це складена дія, що передбачає виконання послідовних дій, які самі по собі теж складаються з певних операцій:

1) визначення першого неповного діленого;
2) визначення найвищого розряду частки;
3) визначення кількості цифр у частці;
4) виконання ділення з остачею під час ділення неповного діленого на дільник;
5) визначення числа одиниць певного розряду, які розділилися;
6) визначення числа одиниць певного розряду, які не розділилися;
7) перевірка правильності відповідної цифри частки;
8) утворення наступного неповного діленого.

Коли учень набув навички або вміння виконувати складену дію, тоді він виконує всі елементарні дії спільно, одну за одною, але при засвоєнні складеної дії кожна з них повинна бути засвоєною окремо як самостійна дія.

На етапі підготовчої роботи до введення письмового прийому ділення доцільно повторити таблиці множення і ділення; прийоми позатабличного множення і ділення; означення арифметичної дії ділення; окремі випадки ділення; ділення з остачею; визначення загальної кількості одиниць будь-якого розряду; переведення більших розрядних чисел у менші.

Перед введенням письмового прийому ділення його слід мотивувати. З цією метою учням пропонується знайти значення частки чисел 966 та 3, використовуючи усний прийом обчислення. Вони впевнюються, що міркування дуже довгі, і вчитель показує їм іншу форму запису та інший прийом обчислення — письмовий (куточком).

$$
\begin{aligned}
966:3 &= (900+60+6):3 = \\
&= 900:3+60:3+6:3 = \\
&= 300+20+2 = 322
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-966 & \underline{3\quad} \text{ — I неповне ділене}\\
\underline{9} & 322\\
-6 & \text{— II неповне ділене}\\
\underline{6} & \\
-6 & \text{— III неповне ділене}\\
\underline{6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Пропонуємо учням пояснити спосіб міркування при знаходженні частки чисел 966 і 3 з використанням усного прийому обчислення. Запитуємо, як називається сума чисел $900+60+6$. Просимо учнів описати спосіб міркування на кожному етапі роз'язання: що вони робили в першу чергу, що — у другу; у третю...

Просимо учнів зіставити усний і письмовий прийоми ділення; пояснити спосіб міркування при знаходженні частки чисел із використанням письмового прийому. [Письмовий прийом, як і усний, починаємо з вищого розряду — сотень, тобто спочатку поділимо 9 сотень на 3, потім 6 десятків, а потім 6 одиниць. У випадку письмового ділення 9 сотень, 6 десятків та 6 одиниць називаються неповними діленими, так: 9 сотень — це перше неповне ділене, 6 десятків — це друге неповне ділене, 6 одиниць — це третє неповне ділене. Неповні ділені почергово ділимо на дільник та одержуємо розрядні доданки частки: 9 сотень $:3=3$ сотні, 6 десятків $:3=2$ десятки, 6 одиниць $:3=2$ одиниці; 3 сотні, 2 десятки і 2 одиниці — це розрядні доданки частки: $300+20+2=322$ — це частка: 3 — перша цифра частки, 2 — друга цифра частки, 2 — третя цифра частки.]

Запитуємо в учнів, що показують числа, записані в письмовому прийомі під неповними діленими. [Ці числа показують, скільки одиниць цього розряду розділилося: число 9 показує, що при діленні сотень розділилося 9 сотень; число 6 показує, що при діленні десятків розділилося 6 десятків; число 6 показує, що при діленні одиниць розділилося 6 одиниць.]

Пропонуємо учням алгоритм міркування, щоб знайти число одиниць певного розряду, які розділилися:

1) множу першу цифру частки на дільник;
2) роблю висновок.

Наприклад:

3 сотні $\cdot 3=9$ сотень розділилися; 2 десятки $\cdot 3=6$ десятків розділилися, 2 одиниці $\cdot 3=6$ одиниць розділилися.

Після того як знайдено, скільки одиниць певного розряду розділилося, це число слід записати під неповним діленим. У цьому випадку бачимо, що всі сотні розділилися, усі десятки розділилися, усі одиниці розділилися.

Очевидно, що це найпростіші випадки письмового ділення. Поступово випадки ускладнюються, й учні вчаться утворювати неповне ділене з остачі та одиниць певного розряду діленого; утворювати перше неповне ділене, коли число одиниць вищого розряду діленого менше за дільник.

Докладно динаміку подання випадків письмового ділення та опрацювання алгоритмів визначення першого неповного діленого; найвищого розряду частки та кількості цифр у частці; визначення кількості одиниць певного розряду, що розділилися, та кількості одиниць певного розряду, що не розділилися; утворення наступного неповного діленого див. за посиланням. Коли в учнів будуть сформовані всі ці дії, пропонуємо їм загальний алгоритм письмового ділення. Наведемо алгоритм письмового ділення на одноцифрове число зі складом всіх його операцій.

ПАМ'ЯТКА

Письмовий прийом ділення

1. Відокремлюю ділене від дільника куточком.
2. Визначаю перше неповне ділене:
   - ділення починаю з найвищого розряду, тому читаю число одиниць найвищого розряду діленого;
   - порівнюю число одиниць найвищого розряду з дільником: якщо це число більше, то воно і є першим неповним діленим; якщо менше — переходжу до наступного розряду — відповідне число і є першим неповним діленим.

   Можна міркувати ще й так:
   - читаю число одиниць найвищого розряду діленого;
   - визначаю, *чи можна це число поділити на дільник так, щоб отримати такі самі розрядні одиниці.*

Можна	**Не можна**
Це перше неповне ділене	У діленому відокремлюю число одиниць наступного розряду — це перше неповне ділене

3. Визначаю найвищий розряд і кількість цифр у значенні частки:
   - з'ясовую, у яких розрядних одиницях подано перше неповне ділене, — такий самий розряд є найвищим у значенні частки;
   - визначаю, скільки цифр потрібно для запису числа з таким найвищим розрядом;
   - роблю висновок про кількість цифр у значенні частки.
4. Ділю перше неповне ділене на дільник. Записую першу цифру значення частки.
5. Визначаю дією множення, скільки одиниць певного розряду розділилося.

6. Визначаю дією віднімання, скільки одиниць певного розряду не розділилося:
   - підписую під неповним діленим число одиниць певного розряду, які розділилися;
   - віднімаю це число від неповного діленого;
   - роблю висновок: □ одиниць цього розряду не розділилося — це остача.
7. Перевіряю, чи правильно знайдено цифру значення частки:
   - порівнюю остачу з дільником;
   - роблю висновок: якщо остача менша за дільник, то цифру значення частки знайдено правильно; якщо остача більша або дорівнює дільнику, то цифру значення частки знайдено неправильно, слід продовжити ділення.

Можна міркувати ще й так:
   - читаю число одиниць певного розряду, які не розділилися;
   - визначаю, *чи можна це число поділити на дільник так, щоб отримати результат, виражений у тих самих розрядних одиницях*.

Можна
Цифру значення частки знайдено неправильно, слід повторити ділення

Не можна
Цифру значення частки знайдено правильно

8. Утворюю наступне неповне ділене:
   - остачу виражаю в одиницях наступного розряду;
   - визначаю, скільки в діленому одиниць цього розряду;
   - додаю до остачі кількість одиниць діленого та записую отримане число одиниць певного розряду — це і є наступне неповне ділене.
9. Ділю наступне неповне ділене на дільник. Записую наступну цифру значення частки.
   Повторюю міркування, починаючи з пункту 5.

```
_812 | 2
 8   |406
 _1
  0
 _12
  12
   0
```

Наприклад: 812 : 2.

Відокремлюємо ділене від дільника куточком. Визначаємо перше неповне ділене. Ділення починаємо з найвищого розряду. У найвищому розряді 8 сотень. 8 сотень можна поділити на 2 так, щоб одержати хоча б одну сотню. Отже, 8 сотень — це перше неповне ділене. Визначаємо найвищий розряд та кількість цифр у значенні частки. Якщо перше неповне ділене сотні, то й у найвищому розряді також отримаємо сотні. Щоб записати число з найвищим розрядом сотень, потрібно три цифри. Ділимо перше неповне ділене (8 сотень) на 2 — одержимо 4. Запишемо цифру 4 на місці сотень у значенні частки. Дією множення дізнаємося, скільки сотень розділилося, — 8 сотень розділилося; усі сотні розділилися. Утворюємо друге неповне ділене: у діленому 1 десяток. 1 десяток — друге неповне ділене. Ділимо друге неповне ділене на дільник. 1 десяток не можна розділити на 2 так, щоб одержати хоча б один десяток, тому на місці десятків у значенні частки пишемо 0. Або: друге неповне ділене 1 десяток, 1 менше від 2, тому в неповній частці буде 0, а 1 переходить в остачу. Дією множення дізнаємося, скільки десятків розділилося, — 0 десятків розділилося. Дією віднімання дізнаємося, скільки десятків не розділилося, — 1 десяток не розділився. Перевіряємо: остача менша від дільника, тому цифру десятків частки визначено правильно. Утворюємо третє неповне ділене з остачі та одиниць діленого. Залишився 1 десяток: 1 десяток = 10 одиниць; у діленому ще 2 одиниці — усього 12 одиниць. Це третє неповне ділене. Ділимо третє неповне ділене на дільник, одержуємо 6. Записуємо цифру 6 на місці одиниць у значенні частки. Дією множення дізнаємося, скільки одиниць розділилися, — 12 одиниць розділилося; усі одиниці розділилися. Ділення закінчено.

Відповідно до того як засвоюється письмовий прийом ділення пояснення поступово скорочуються. При короткому поясненні спочатку називають перше неповне ділене і встановлюють кількість цифр у значенні частки. Далі коротко пояснюється виконання решти операцій: називають тільки відповідні арифметичні дії і їх результати.

Після одержання результату письмового ділення доцільно звернути увагу учнів на кількість цифр у значенні частки та з’ясувати, скільки може бути цифр при діленні трицифрового числа на одноцифрове і від чого це залежить.

> У результаті ділення на одноцифрове число
> в значенні частки отримаємо стільки цифр,
> скільки їх у діленому, або на одну цифру менше.

2.2.3. Методика вивчення письмового множення двоцифрового числа на двоцифрове

Ознайомлення з письмовим прийомом множення на двоцифрове число

З метою мотивації пропонуємо учням знайти добуток двоцифрових чисел 12 і 15.

$12 \cdot 15 = 12 \cdot (10 + 5) = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 5 = 120 + 60 = 180$

Другий множник 15 подаємо у вигляді суми розрядних доданків: $10 + 5$. Множимо число 12 на кожен із розрядних доданків: $12 \cdot 10$ і $12 \cdot 5$. Додаємо одержані добутки. Запитуємо, чи можна міркувати так само при множенні чисел 36 і 27. Застосовуємо цей самий спосіб міркування. Це складніший випадок обчислення, тому множення числа 36 на розрядні числа 20 і 7 записуємо у стовпчик. Також у стовпчик записуємо знаходження значення суми цих добутків.

$36 \cdot 27 = 36 \cdot (20 + 7) = 36 \cdot 20 + 36 \cdot 7 = 720 + 252 = 972$

$$\times\begin{array}{r} 36 \\ 20 \\ \hline 720 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 36 \\ 7 \\ \hline 252 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 720 \\ 252 \\ \hline 972 \end{array}$$

Добутки 720 і 252 називають неповними. Додавши ці добутки, отримаємо значення добутку чисел 36 та 27, він дорівнює 972. Знаходження значення цього виразу можна записати у стовпчик.

$$\begin{array}{rrl} \times & 36 & \\ & 27 & \\ \hline & 252 & \text{— I неповний добуток} \\ + & 72 & \text{— II неповний добуток} \\ \hline & 972 & \text{— добуток} \end{array}$$

Записуємо числа стовпчиком: одиниці під одиницями, десятки під десятками. Множимо перший множник 36 на число одиниць другого множника, на 7 одиниць, отримуємо 252 одиниці — це перший неповний добуток. Множимо перший множник 36 на 2 десятки, отримуємо 72 десятки — це другий неповний добуток. Додаємо ці неповні добутки. Отримуємо значення добутку.

Зауваження: нуль наприкінці другого неповного добутку можна не писати, тому що, додавши число одиниць першого неповного добутку до нуля, завжди отримаємо число одиниць першого неповного добутку. Надалі не будемо писати цей нуль, але при множенні десятків почнемо підписувати другий неповний добуток під десятками першого неповного добутку.

Отже, перший неповний добуток завжди виражений одиницями, а другий неповний добуток — десятками.

ПАМ'ЯТКА

Письмове множення на двоцифрове число

1. Записую множники стовпчиком.
2. Множення починаю з одиниць. Множу одиниці другого множника на перший множник. Отримую одиниці — це перший неповний добуток. Результат починаю записувати з розряду одиниць.
3. Множу десятки другого множника на перший множник. Отримую десятки — це другий неповний добуток. Результат починаю записувати з розряду десятків.
4. Додаю неповні добутки, отримую значення добутку.

2.2.4. Методика вивчення письмового ділення трицифрового числа на двоцифрове

При письмовому діленні на двоцифрове число виконуються всі розглянуті вище для випадків письмового ділення на одноцифрове число кроки, отже, пам'ятка залишається майже без змін. Зміни відбуваються лише в способі визначення цифр частки. Для добору пробних цифр значення частки використовується спосіб міркування, при якому ділене замінюють найближчим круглим числом, а далі — замінюють кругле число добутком розрядної одиниці і числа. Тому перед вивченням письмового ділення на двоцифрове число доцільно розглянути випадки письмового ділення на кругле число.

ДІЛЕННЯ НА КРУГЛЕ ЧИСЛО

Прийом ділення на кругле число полягає в поданні круглого числа у вигляді добутку числа і розрядної одиниці та в послідовному діленні кожного неповного діленого спочатку на розрядну одиницю, а потім на число.

Тому на етапі актуалізації слід повторити усний прийом послідовного ділення чисел, що закінчуються нулями.

$900 : 30 = 900 : (10 \cdot 3) = (900 : 10) : 3 = 90 : 3 = 30$

$180 : 60 = 180 : (10 \cdot 6) = (180 : 10) : 6 = 18 : 6 = 3$

$5600 : 800 = 5600 : (100 \cdot 8) = (5600 : 100) : 8 = 56 : 8 = 7$

Ознайомлення з письмовим діленням на кругле число пропонуємо здійснити на прикладі ділення трицифрового числа на кругле, а потім перенести новий спосіб дії на випадки ділення багатоцифрових чисел на круглі десятки або круглі сотні.

$$
\begin{array}{r|l}
-780 & 30 \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3 \\
\underline{60} & \overline{\dot{2}\dot{6}} \\
-180 & \\
\underline{180} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
78 : 10 \approx 7, & 7 : 3 \approx 2; \\
180 : 10 = 18, & 18 : 3 = 6.
\end{array}
$$

Ділення починаємо з найвищого розряду: у найвищому розряді 7 сотень, 7 сотень не можна поділити на 30 так, щоб отримати хоча б одну сотню. Переходимо до наступного розряду: маємо 78 десятків — це перше неповне ділене.

Так нераціонально визначати перше неповне ділене, тому що очевидно, що число сотень не можна поділити на двоцифрове число так, щоб отримати хоча б одну сотню. Тому відразу потрібно в діленому ліворуч відділити дві цифри і починати міркувати саме з числа десятків: 78 десятків можна поділити на 30 так, щоб отримати хоча б один десяток, тому 78 десятків — це перше неповне ділене.

Найвищий розряд частки — десятки, тому в частці буде дві цифри.

Ділимо 78 десятків на 30. Для цього число 30 подаємо у вигляді добутку розрядної одиниці 10 та числа 3. Послідовно ділимо число 78 спочатку на 10, а потім — на 3. $78 : 10 \approx 7$ (щоб поділити число на 10, достатньо справа прикрити в числі одну цифру). Одержаний результат ділимо на 3. $7 : 3 \approx 2$. Пишемо в значенні частки на місці десятків цифру 2.

Дізнаємося дією множення, скільки десятків розділилося: 60 десятків розділилося.

Дізнаємося дією віднімання, скільки десятків не розділилося: 18 десятків не розділилося.

Перевіряємо, чи правильно знайдено цифру частки: остача 18 менша за дільник 30. Цифру частки знайдено правильно.

Утворюємо друге неповне ділене: 18 десятків — це 180 одиниць; 180 одиниць — друге неповне ділене.

Ділимо 180 одиниць на 30 послідовно: $180 : 10 = 18$, $18 : 3 = 6$. Пишемо цифру 6 у частці на місці одиниць.

Дією множення дізнаємося, скільки одиниць розділилося. Розділилося 180 одиниць. Усі одиниці розділилися. Ділення закінчено.

ДІЛЕННЯ ТРИЦИФРОВОГО ЧИСЛА НА ДВОЦИФРОВЕ ЧИСЛО

Першим випадком письмового ділення на двоцифрове число є випадок **ділення трицифрового числа на двоцифрове число,**

коли в значенні частки лише одна цифра. При вивченні цього матеріалу корисно згадати спосіб добору, що застосовувався при усному діленні двоцифрового числа на двоцифрове.

$$51 : 17 = \boxed{}$$

51 поділити на 17 — це означає знайти таке число, яке при множенні на 17 дає 51.

Міркуємо так: знаходимо таке число, яке при множенні на одиниці дільника (7) дає число, яке закінчується одиницями діленого (1), — це число 3, більше таких чисел немає.

$5\underline{1} : 1\underline{7} = \boxed{}$, тому що $\boxed{} \cdot 17 = 51$.

3 — ?

$3 \cdot 17 = 51$, $51 = 51$.

Отже, поділивши 51 на 17, у частці отримаємо 3, тому що 3 помножити на 17 буде 51.

Аналогічно міркуємо при обчисленні часток: 91 : 13; 57 : 19; 98 : 14; 95 : 19; 72 : 36; 60 : 12.

Пропонуємо учням порівняти подані вирази і визначити, що в них спільне. [Спільним є те, що в усіх випадках ділили на двоцифрове число, а також в усіх випадках в значенні частки отримали одноцифрове число. Також в усіх випадках спільним є спосіб обчислення.] Запитуємо, чому в усіх випадках у значенні частки отримали лише одну цифру. [У значенні частки лише одна цифра, тому що число десятків кожного діленого не можна поділити на дільник так, щоб отримати в частці десятки, тому першим неповним діленим буде все число одиниць — і, відповідно, у значенні частки отримаємо лише одну цифру — одиниці.]

Просимо учнів записати вираз: ділене 224, дільник 32 — і з'ясувати, скільки цифр буде в значенні частки. [У дільнику дві цифри, тому в діленому відділяємо зліва також дві цифри, маємо 22 десятки. 22 десятки не можна поділити на 32 так, щоб отримати хоча б один десяток, тому переходимо до наступного розряду одиниць. У діленому всього 224 одиниці. Тому першим неповним діленим буде 224 одиниці. Отже, найвищий розряд у значенні частки — одиниці. Щоб записати одиниці, потрібна лише одна цифра.]

Просимо учнів порівняти подану частку з попередніми і з'ясувати, чим вони схожі [схожі тим, що тут також ділимо на двоцифрове число і в частці отримуємо лише одну цифру]; чим відрізняються [відрізняються діленими: у цьому випадку ділене є трицифровим числом].

Запитуємо учнів, чи можна при розв'язуванні міркувати так само, як і в попередніх випадках.

Спробуємо: число 224 поділити на 32 — це означає знайти таке число, яке при множенні на 32 дає 224. Прикинемо, які числа слід випробовувати множенням: знайдемо таке число, яке при множенні на одиниці дільника (2) дає число, що закінчується одиницями діленого (4), — це числа 2 та 7. Лише ці числа будемо випробовувати множенням.

$22\underline{4} : 3\underline{2} = \square$, тому що $\square \cdot 32 = 224$.

2; 7 — ?

$2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 32 = 64$, $64 \neq 224$;

$7 \cdot 2 = 14$, $7 \cdot 32 = 224$, $224 = 224$.

Після виконання завдання запитуємо в учнів, перед якими труднощами вони постали при обчисленні цього виразу. [Важко було усно множити 7 на 32, тому що в добутку отримуємо трицифрове число.]

Пропонуємо учням інший спосіб запису розв'язання — куточком.

$$\begin{array}{r|l} -\,22\underline{4} & \underline{32} \\ \underline{224} & \underset{\cdot}{7} \\ 0 & \end{array}$$

2; 7 — ?

$2 \cdot 32 = 64$, $64 \neq 224$;

$7 \cdot 32 = 224$, $224 = 224$.

Для закріплення в учнів вміння виконувати письмове ділення, пропонуємо знайти значення частки чисел 425 і 85. У дільнику дві цифри, тому в діленому зліва відділяємо дві цифри, — маємо 42 десятки. 42 десятки не можна поділити на 85 так, щоб отримати хоча б один десяток, тому переходимо до розряду одиниць. 425 одиниць — перше неповне ділене.

$$\begin{array}{r|l} -\,425 & \underline{85} \\ \underline{425} & \underset{\cdot}{5} \\ 0 & \end{array}$$

3; 5; 7; 9 — ?

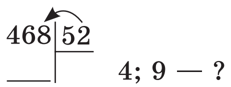
$3 \cdot 85 = 255$, $255 \neq 425$;

$5 \cdot 85 = 425$, $425 = 425$.

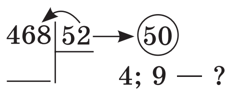
Визначимо найвищий розряд та кількість цифр у значенні частки. Перше неповне ділене 425 одиниць, тому в частці отримаємо одиниці в найвищому розряді, отже, у частці буде лише одна цифра; поставимо одну крапку на місці цифр значення частки.

Запитуємо в учнів, як слід міркувати при визначенні частки. [Потрібно прикинути: знайти такі числа, які при множенні на одиниці дільника (5) дають числа, які закінчуються на одиниці діленого (5). Це такі числа: 3, 5, 7, 9. Випробуємо їх множенням: $3 \cdot 85 = 255$, не отримали ділене. Випробуємо число 5: $5 \cdot 85 = 425$, отримали ділене. Тому значення частки — 5.]

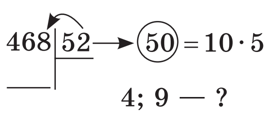
Випробовувати декілька чисел множенням дійсно незручно, довго. Тому будемо прикидати, яке саме з обраних чисел слід випробовувати множенням. Розглянемо приклад.



Для того щоб прикинути, яке з двох чисел є часткою, замінимо дільник меншим круглим числом.

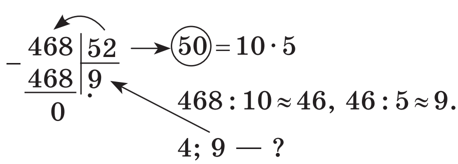


Запитуємо учнів, як поділити на кругле число. [Число 50 потрібно подати у вигляді добутку розрядної одиниці і числа: 10 та 5 — і послідовно поділити спочатку на розрядну одиницю, а потім одержаний результат поділити на число.]



Отже, 468 спочатку поділимо на 10, а потім на 5: $468 : 10 \approx 46$, $46 : 5 \approx 9$.

Тому будемо множити число 9 на 52. Записуємо відразу цифру 9 у значенні частки і виконуємо множення.



Після цього пропонуємо учням замінити дільник ближчим меншим круглим числом і знайти значення часток: $150 : 75$; $406 : 58$; $195 : 65$; $464 : 58$.

Після того як учні виконали завдання, просимо їх пояснити, що вони робили на кожному з етапів обчислення, і пропонуємо їм порівняти свої дії з пам’яткою.

ПАМ'ЯТКА

Спосіб добору значення частки

1. Добираю числа, множення яких на одиниці дільника дає результат, що закінчується одиницями діленого.
2. Дільник замінюю найближчим меншим круглим числом.
3. Подаю кругле число у вигляді добутку 10 і числа.
4. Ділю ділене спочатку на 10, потім одержане число ділю на другий множник.
4. Серед виписаних чисел вибираю найближче до отриманого числа. Це число і є значенням частки.

Далі учні ознайомлюються з випадками **ділення трицифрового числа на двоцифрове число, коли в значенні частки дві цифри**. До цього моменту учні вже знають алгоритм письмового ділення на одноцифрове число, вміють прикидати цифри частки способом заміни дільника меншим круглим числом та способом поступового ділення діленого спочатку на 10, а потім на число. Тому ці вміння слід актуалізувати і перенести в нову ситуацію.

З цією метою пропонуємо учням знайти значення частки чисел 828 та 36.

Записуємо числа куточком. Визначаємо перше неповне ділене: у дільнику дві цифри, тому в діленому відділяємо ліворуч також дві цифри — отримуємо 82 десятки; 82 десятки можна поділити на 36 так, щоб отримати хоча б один десяток. Отже, перше неповне ділене — 82 десятки. Тому найвищий розряд у значенні частки — десятки, а отже, у значенні частки буде дві цифри.

$$\begin{array}{r|l} 828 & 36 \\ \hline \end{array}$$

Просимо учнів пояснити, як потрібно міркувати, щоб 82 десятки поділити на 36. Запитуємо, що можна зробити, щоб прикинути, яка цифра буде першою цифрою в значенні частки. [Потрібно дільник 36 замінити меншим круглим числом 30. Число 30 можна подати у вигляді добутку чисел 10 та 3. Перше неповне ділене 82 поділимо спочатку на 10, а потім на 3.

$82 : 10 \approx 8$, $8 : 3 \approx 2$. 2 — перша цифра значення частки, записуємо її на місці десятків.]

$$\begin{array}{r|l} 82\underline{8} & 36 \\ \cline{2-2} & 2\,. \end{array} \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3$$

$$82 : 10 \approx 8,\ 8 : 3 \approx 2.$$

Запитуємо в учнів, як дізнатися, скільки десятків розділилося. [Щоб дізнатися, скільки десятків розділилося, потрібно 2 помножити на 36. 72 десятки розділилося.]

Просимо учнів визначити, скільки десятків не розділилося. [Від першого неповного діленого — 82 десятків — слід відняти 72 десятки. 10 десятків не розділилося.]

Просимо учнів пояснити, як перевірити, чи правильно знайдено цифру значення частки. [Потрібно порівняти остачу з дільником: 10 менше від 36, остача менша від дільника, отже, цифру значення частки знайдено правильно.]

$$\begin{array}{r|l} -\,82\underline{8} & \underline{36} \\ \underline{72} & 2\,\cdot\,\cdot \\ 10 & \end{array} \qquad 36 \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3 \qquad 82:10 \approx 8,\ 8:3 \approx 2.$$

Пропонуємо учням пояснити спосіб міркування, щоб утворити друге неповне ділене. [Залишилося 10 десятків — це 100 одиниць — і в діленому є ще 8 одиниць; отже, 108 одиниць — друге неповне ділене.]

$$\begin{array}{r|l} -\,82\underline{8} & \underline{36} \\ \underline{72} & 2\,\cdot \\ 108 & \end{array} \qquad 36 \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3 \qquad 82:10 \approx 8,\ 8:3 \approx 2.$$

Просимо учнів розказати, як визначити другу цифру значення частки. [Потрібно 108 спочатку поділити на 10, а потім одержаний результат поділити на 3 — $108:10 \approx 10$, $10:3 \approx 3$. Пишемо цифру 3 на місці другої цифри значення частки.]

$$\begin{array}{r|l} -\,82\underline{8} & \underline{36} \\ \underline{72} & 23 \\ 108 & \cdot\,\cdot \end{array} \qquad 36 \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3 \qquad \begin{array}{l} 82:10 \approx 8,\ 8:3 \approx 2; \\ 108:10 \approx 10,\ 10:3 \approx 3. \end{array}$$

Пропонуємо учням з'ясувати, скільки одиниць розділилося [розділилося 108 одиниць]; скільки одиниць не розділилося [усі одиниці розділилися]. Ділення закінчено.

$$\begin{array}{r|l} -\,82\underline{8} & \underline{36} \\ \underline{72} & 23 \\ -\,108 & \cdot\,\cdot \\ \underline{108} & \\ 0 & \end{array} \qquad 36 \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3 \qquad \begin{array}{l} 82:10 \approx 8,\ 8:3 \approx 2; \\ 10 \approx 10,\ 10:3 \approx 3. \end{array}$$

Закріплення отриманих знань здійснюється під час обчислення часток: $768:32$; $494:38$; $546:21$; $552:24$.

Не завжди отримана таким чином цифра частки підходить. Іноді при множенні знайденої цифри частки на дільник отримуємо число, більше за неповне ділене. Тому слід ознайомити учнів зі способом прикидки пробних цифр значення частки.

З цією метою просимо учнів записати під диктовку вираз і знайти його значення: ділене 952, дільник 34.

Записуємо ділене і дільник. Відділяємо дільник куточком. Визначаємо перше неповне ділене. Для цього в дільнику підраховуємо кількість цифр — дві цифри, тому в числі 952 ліворуч відділяємо також дві цифри; отримуємо 95 десятків. 95 десятків можна поділити на 34 так, щоб отримати десятки, тому 95 десятків є першим неповним діленим. Оскільки 95 десятків — перше неповне ділене, то найвищим розрядом у значенні частки будуть десятки, тобто дві цифри; ставимо дві крапки на місці цифр значення частки. Знаходимо першу цифру значення частки. Для цього 34 замінюємо найменшим круглим числом 30. 30 — це 10, помножене на 3. Отже, 95 поділимо спочатку на 10, а потім на 3. $95:10\approx 9,\ 9:3\approx 3$. Запишемо цифру 3 на місці першої цифри значення частки. Дізнаємося, скільки десятків поділилося дією множення.

$$\begin{array}{r|l} -\,95\underline{2} & \underline{34} \\ \underline{102\ } & 3 \\ & \cdot\ \cdot \end{array} \longrightarrow 30 = 10\cdot 3$$

$$95:10\approx 9,\ 9:3\approx 3$$

Запитуємо учнів, що цікаве вони помітили; чи можна від 95 відняти 102. [Ми не можемо від меншого числа відняти більше. У нас лише 95 десятків, але виходить, що поділилося 102 десятки, а це неможливо. Це свідчить про те, що цифра десятків частки знайдена неправильно.]

Так, не завжди, міркуючи способом заміни дільника меншим круглим числом, ми отримуємо правильну цифру значення частки. Отримані цифри потрібно перевіряти.

Отже, цифра 3 — це пробна цифра значення частки, її потрібно перевірити. Можна перевірити множенням, як ми і зробили, а можна прикинути. Як ми вже впевнилися, прикидати легше, ніж обчислювати. Тому прикинемо.

При перевірці пробних цифр значення частки прикидають так. Отримане число множать на десятки дільника: $3\cdot 30=90$. Визначають, що залишиться від неповного діленого: $95-90=5$. Порівнюють остачу з добутком «пробної цифри» значення частки 3 на одиниці дільника 4. Очевидно, що $5<3\cdot 4$. 5 не вистачить, щоб 3 помножити на 4. Тому цифра 3 не підходить, потрібно взяти на одиницю менше — 2.

Перевіримо цифру 2. Для цього 2 множимо на десятки діленого: $2\cdot 30=60$. Визначаємо, скільки залишилося від неповного діленого: $95-60=35$. Порівнюємо остачу 35 з добутком числа 2 на число одиниць 4 — $35>2\cdot 4$. 35 вистачить, щоб 2 помножити на 4. Тому цифра 2 підходить, пишемо її в значенні частки.

$$\begin{array}{l|l} -\,95\underline{2} & 34 \\ \quad\underline{68} & \overline{2\;\cdot\;\cdot} \\ \quad 27 & \end{array} \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3$$

$95 : 10 \approx 9,\ 9 : 3 \approx 3;\ \cancel{3}$ — ? $3 \cdot 30 = 90$

$95 - 90 = 5$

$5 < 3 \cdot 4$

2 — ? $2 \cdot 30 = 60$

$95 - 60 = 35$

$35 > 2 \cdot 4$

Визначаємо, скільки десятків розділилося [68 десятків]; скільки десятків не розділилося [27 десятків]; перевіряємо остачу [остача менша за дільник, тому ділення виконано правильно].

Утворюємо друге неповне ділене. [Залишилося 27 десятків — це 270 одиниць — та ще 2 одиниці діленого, буде 272 одиниці — це друге неповне ділене.]

Знаходимо другу цифру значення частки. [272 поділимо спочатку на 10, а потім на 3. $272 : 10 \approx 27,\ 27 : 3 \approx 9$.]

Перевіряємо отриману другу цифру значення частки. Для цього множимо її на десятки дільника: $9 \cdot 30 = 270$; визначаємо, скільки залишилося від неповного діленого: $272 - 270 = 2$; порівнюємо остачу 2 з добутком пробної цифри 9 на одиниці діленого: $2 < 9 \cdot 4$, 2 не вистачить, щоб $9 \cdot 4$, тому цифра 9 не підходить. Візьмемо на одиницю менше — 8. Перевіримо її. Помножимо 8 на десятки дільника: $8 \cdot 30 = 240$. Визначимо, скільки залишиться від неповного діленого: $272 - 240 = 32$. Порівнюємо остачу 32 з добутком «пробної цифри» значення частки 8 на одиниці дільника 4 — $32 = 8 \cdot 4$; 32 вистачить, щоб $8 \cdot 4$, тому цифра 8 є другою цифрою значення частки; запишемо її на другому місці.

$$\begin{array}{l|l} -\,95\underline{2} & 34 \\ \quad\underline{68} & \overline{28} \\ -\,272 & \\ \quad\underline{272} & \\ \qquad 0 & \end{array} \longrightarrow 30 = 10 \cdot 3$$

$95 : 10 \approx 9,\ 9 : 3 \approx 3;\ \cancel{3}$ — ? $3 \cdot 30 = 90$

$95 - 90 = 5$

$5 < 3 \cdot 4$

2 — ? $2 \cdot 30 = 60$

$95 - 60 = 35$

$35 > 2 \cdot 4$

$272 : 10 \approx 27,\ 27 : 39;\ \cancel{9}$ — ? $9 \cdot 30 = 270$

$272 - 270 = 2$

$2 < 9 \cdot 4$

8 — ? $8 \cdot 30 = 240$

$272 - 240 = 32$

$32 = 8 \cdot 4$

Визначаємо, скільки одиниць розділилося [272 одиниці]; скільки одиниць не розділилося [усі одиниці розділилися, ділення закінчено].

Зазначимо, що останню цифру значення частки можна шукати таким самим способом, як при діленні трицифрового числа на двоцифрове, коли в значенні частки одержуємо одну цифру.

ПАМ'ЯТКА

Спосіб прикидки пробних цифр значення частки

1. Множу «пробну цифру» значення частки на десятки дільника.
2. Віднімаю від неповного діленого одержаний результат.
3. Порівнюю остачу і добуток «пробної цифри» значення частки на одиниці дільника:
   - якщо остача є більшою за добуток або дорівнює йому, то пробна цифра підходить;
   - якщо остача менша за добуток, то пробна цифра не підходить і слід взяти цифру, що є на одиницю меншою.

З метою закріплення способу перевірки пробних цифр значення частки учням пропонується виконати ділення письмово: 912 : 24; 546 : 26; 912 : 24; 828 : 36; 925 : 37.

Далі учні виконують письмове ділення трицифрового числа на двоцифрове з остачею. Міркування здійснюються за відомим алгоритмом, але, на відміну від ділення націло, не всі одиниці діленого розділяться, тому слід ще раз остачу порівняти з дільником і зробити висновок про правильність знайденої цифри значення частки.

2.2.5. Методика вивчення нумерації багатоцифрових чисел

Узагальнення та систематизація нумерації чисел у межах 1000 здійснюється на початку навчального року. Докладніше див. за посиланням.

УСНА ТА ПИСЬМОВА НУМЕРАЦІЯ БАГАТОЦИФРОВИХ ЧИСЕЛ

Очікувані результати навчання здобувачів освіти див. за посиланням.

Наочний і дидактичний матеріал:

- лічильні палички — одиниці, пучки лічильних паличок — десятки, пучки лічильних паличок — сотні, пучки лічильних паличок — тисячі;

- кружки-намистинки — одиниці, низки кружків-намистинок — десятки, площинки кружків-намистинок — сотні, кубики кружків-намистинок — тисячі;
- картки з розрядними числами;
- таблиця розрядів і класів.

Усна і письмова нумерації вивчаються паралельно. У деяких підручниках із математики для 4 класу числа вивчаються в порядку збільшення розрядів: чотирицифрові числа; п'ятицифрові числа; шестицифрові числа. Розглянемо введення багатоцифрових чисел у порядку нарощування розрядів.

Фундаментом для вивчення нумерації багатоцифрових чисел є знання нумерації чисел, отримані в 1 класі, тому підготовкою до ознайомлення з чотирицифровими числами є: утворення трицифрових чисел прирахуванням по 1; актуалізація розрядного складу трицифрових чисел; позиційного принципу запису трицифрових чисел; співвідношення відомих лічильних одиниць.

Ознайомлення з нумерацією чотирицифрових чисел

Утворення одиниці другого класу — тисячі — здійснюється шляхом прирахування по 1: учні лічать і записують числа, починаючи з числа 995, до 1000; встановлюють, що за найбільшим трицифровим числом йде найменше чотирицифрове число.

Повторюючи співвідношення лічильних одиниць і їх групування в більші лічильні одиниці, учні доходять висновку.

10 одиниць = 1 десяток
10 десятків = 1 сотня
10 сотень = 1 тисяча

Звертаємо увагу учнів на те, що тисячами можна рахувати так само, як і простими одиницями: можна їх групувати в десятки, сотні і тисячі.

10 одиниць тисяч = 1 десятків тисяч
10 десятків тисяч = 1 сотня тисяч
10 сотень тисяч = 1 тисяча тисяч = 1 мільйон

Спочатку розглядається утворення чисел: 1001, 1002... Учні лічать від 1008 до 1020 тощо; читають числа, проілюстровані за допомогою пучків лічильних паличок — тисяч, сотень і десятків — та окремих лічильних паличок-одиниць.

Діти ознайомлюються з розрядом одиниць тисяч і вчаться читати числа, записані в таблиці розрядів і класів, причому пропонуються числа, у яких відсутні одиниці, або десятки, або сотні, або одиниці кількох розрядів одночасно; називають розрядний склад записаних чисел.

Далі учням пропонується прочитати чотирицифрові числа, які вже не подані в таблиці розрядів і класів: 1005, 1009, 1110, 1214, 1999. Читати чотирицифрові числа починаємо з найвищого розряду: читаємо число тисяч зі словом «тисяч», а друга частина — решта. Наводимо узагальнену пам'ятку.

ПАМ'ЯТКА

Читання багатоцифрових чисел

1. Виділяю число першого класу, відраховую справа наліво три цифри; ліворуч залишається число другого класу.
2. Читаю число другого класу зі словом «тисяч».
3. Читаю число першого класу без слова «одиниць».

Учні вчаться визначати число одиниць кожного розряду, наприклад: число 8456 містить 8 тисяч, 4 сотні, 5 десятків та 6 одиниць.

Школярі записують чотирицифрові числа з вказуванням їхнього розрядного складу: 3 тисячі, 7 сотень, 5 десятків і 8 одиниць; 7 тисяч і 9 одиниць; 7 тисяч і 9 десятків.

Запис чотирицифрових чисел являє собою певні труднощі для молодших школярів. Тому потрібно вчити учнів міркувати за пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Записування багатоцифрових чисел

1. Записую число класу тисяч. Ставлю за ним три крапки.
2. На місці крапок записую число класу одиниць.

Далі діти записують чотирицифрові числа під диктовку учителя, без вказування розрядного складу числа.

На підставі порядку слідування чисел у натуральному ряді учні виконують додавання і віднімання числа 1. Також учням пропонуються випадки додавання на підставі розрядного складу числа: $1000 + 5$, $1000 + 10$. У цих випадках міркування здійснюється за відповідною пам'яткою, яка переноситься в нову навчальну ситуацію.

Розглядається утворення двох тисяч: $1999 + 1 = 1000 + (999 + 1) = 1000 + 1000 = 2000$.

Учням також пропонується прочитати круглі тисячі: 1000, 2000, ..., 9000, 10 000.

Учні вчаться подавати чотирицифрове число у вигляді суми розрядних доданків, де число кожного розряду подається як окремий доданок; а також виконувати обернене завдання: суму розрядних доданків замінювати числом.

Також учні вчаться визначати загальну кількість одиниць кожного розряду, наприклад, у числі 8456 усього 8 тисяч, 84 сотні, 845 десятків, 8456 одиниць.

Визначати в числі загальну кількість десятків і сотень школярі вже вміють. Для того щоб визначити в числі загальну кількість тисяч, потрібно справа прикрити 3 цифри, тому що розряд тисяч стоїть на четвертому місці в записі числа, — і залишаться лише тисячі.

Розглядається додавання і віднімання розрядних чисел — круглих тисяч на підставі укрупнення розрядних одиниць: $3+4$; 3 тис. + 4 тис.; $3000+4000$; $9000-6000$ тощо.

Ознайомлення з нумерацією п'ятицифрових чисел здійснюється шляхом прилічування до 10 000 числа 1 і отриманням числа 10 001; за цим числом іде 10 002... Учні лічать від 10 000 до 10 012.

Учні ознайомлюються з розрядом десятків тисяч і читають п'ятицифрові числа, які подані в таблиці розрядів і класів; визначають розрядний склад числа. Міркуємо так. Читаємо числа, починаючи з найвищого розряду, — десятків тисяч: спочатку читаємо, скільки всього в числі тисяч, а потім решту. Подають п'ятицифрові числа у вигляді суми розрядних доданків, і навпаки — суму розрядних доданків замінюють п'ятицифровим числом.

На цьому ж уроці пропонується записати п'ятицифрові числа з вказуванням їхнього класного складу: 25 тисяч і 800 одиниць.

Міркуємо так. Спочатку записуємо число тисяч, ставимо три крапки і записуємо числа кожного розряду класу одиниць; крапки, що залишилися, замінюємо нулями.

Далі учні читають п'ятицифрові числа, які не подані в таблиці розрядів і класів. Для того щоб прочитати п'ятицифрове число, потрібно визначити, скільки в ньому всього тисяч; прочитати це число зі словом «тисяч», а потім прочитати решту числа.

Також школярі ознайомлюються з утворенням числа 20 000: $19\,999+1=10\,000+(9999+1)=10\,000+10\,000=20\,000$.

Учні порівнюють п'ятицифрові числа способом порозрядного порівняння. Застосовується алгоритм порозрядного порівняння. Наприклад, потрібно порівняти числа 25 100 і 25 010. Міркуємо так.

- Порівняння починаємо з найвищого розряду: в обох числах у найвищому розряді десятки тисяч. Порівнюємо числа десятків тисяч: 2 д. тис. = 2 д. тис.

- Переходимо до наступного розряду — одиниць тисяч. Порівнюємо числа одиниць тисяч: 5 од. тис. = 5 од. тис.
- Переходимо до наступного розряду — сотень: 1 с. > 0 с.
- Робимо висновок: 25 100 > 25 010.

Узагальнюються поняття: трицифрове, чотирицифрове і п'ятицифрове число. Учням пропонується виписати окремо трицифрові, чотирицифрові й п'ятицифрові числа.

Учні визначають загальну кількість десятків тисяч, одиниць тисяч, сотень, десятків і одиниць в п'ятицифровому числі за загальним планом (щоб визначити в числі загальну кількість десятків тисяч, потрібно прикрити в ньому чотири цифри, тому що розряд десятків тисяч стоїть на п'ятому місці; прикривши зліва чотири цифри, залишаться тільки десятки тисяч...).

Знання про загальну кількість одиниць кожного розряду можна застосовувати і при порівнянні чисел. Повернемося до попереднього завдання: порівняти числа 25 100 та 25 010. Міркувати можна ще й так.

- Кожне число містить по 25 тисяч.
- Порівнюємо кількість сотень кожного числа: перше число містить 251 сотню, а друге — 250 сотень.
- Оскільки 251 сотня більше, ніж 250 сотень, робимо висновок, що 25 100 > 25 010.

Ознайомлюючись із нумерацією шестицифрових чисел, учні згадують, що 10 десятків тисяч утворюють нову лічильну одиницю — 1 сотню тисяч, сто тисяч; розглядають утворення числа сто тисяч один: 100 000 + 1 = 100 001 — якщо до 100 000 додати 1, то отримаємо 100 001. Прираховуючи по 1, рахуємо далі: 100 002, 100 003, 100 004, ..., 100 157.

Школярі ознайомлюються з назвою розряду сотень тисяч і читають шестицифрові числа, які записані в таблиці розрядів і класів; з'ясовують, на якому місці в записі числа пишуться одиниці, десятки, сотні, одиниці тисяч, десятки тисяч, сотні тисяч; визначають, скільки в числі всього одиниць кожного розряду.

Учні з'ясовують спосіб отримання числа 200 000:

$199\,999 + 1 = 200\,000;$

$200\,000 = 199\,999 + 1 = 100\,000 + (99\,999 + 1) =$

$= 100\,000 + 100\,000 = 200\,000.$

Школярі вчаться читати розрядні числа — сотні тисяч: 100 000, 200 000, 300 000, ..., 900 000, 1 000 000. Тисяча тисяч — це мільйон.

Читання шестицифрових чисел здійснюється за наведеною вище пам'яткою.

Учні вчаться записувати числа, наприклад: 125 753 тощо.

Запис шестицифрових чисел також здійснюється за наведеною вище пам'яткою.

Також учні вчаться розкладати шестицифрові числа на суму розрядних доданків, і навпаки — замінювати суму розрядних доданків числом.

Школярі порівнюють числа на підставі порозрядного порівняння, наприклад: 945 145 і 888 888. Міркуємо так.

- Порівняння починаємо з найвищого розряду — сотень тисяч: 9 с. тис. > 8 с. тис.
- Робимо висновок: 945 145 > 888 888.

Вводиться поняття про клас. При ознайомленні з поняттям «клас» учні дізнаються, що перші три розряди: одиниці, десятки й сотні, — об'єднуються в клас одиниць. Спочатку ми рахували одиницями; потім 10 одиниць згрупували в 1 десяток і рахували десятками; далі 10 десятків, або 100 одиниць, згрупували в 1 сотню і рахували сотнями; отже, усі ці розряди ми отримали в результаті групування одиниць, тому й клас названо — клас одиниць. Об'єднавши 10 сотень, ми отримали нову лічильну одиницю — тисячу — і рахували тисячами. Ми рахували окремими тисячами — одиницями; згрупувавши 10 одиниць тисяч, ми отримали 1 десяток тисяч; згрупувавши 10 десятків тисяч, або 100 тисяч, ми отримали 1 сотню тисяч. Отже, розряди: одиниці тисяч, десятки тисяч, сотні тисяч складають клас тисяч, тому що лічильною одиницею тут є тисяча. Порівнюючи клас одиниць і клас тисяч, учні роблять висновок, що кожний клас містить по три розряди, причому перший розряд — це одиниці, другий — десятки, третій — сотні. Після цього можна запропонувати учням передбачити, скільки розрядів буде в наступному класі мільйонів; як називатимуться ці розряди.

Кожні три розряди справа утворюють клас. Перші три розряди утворюють перший клас — клас одиниць. Другі три розряди утворюють другий клас — клас тисяч; треті три розряди утворюють третій клас — клас мільйонів.

У кожному класі по три розряди. У першому класі I розряд — розряд одиниць, II розряд — розряд десятків, III розряд — розряд сотень. Починаючи з другого класу, до назв розрядів додається назва класу. У другому класі — класі тисяч — одиниці IV (I) розряду називають одиницями тисяч, одиниці V (II) розряду — десятками тисяч, одиниці VI (III) розряду — сотнями тисяч. У третьому класі — класі мільйонів — VII (I) розряд — одиниці мільйонів, VIII (II) розряд — десятки мільйонів, IX (III) розряд — сотні мільйонів.

Наприклад, цифра, яка стоїть на четвертому місці справа, позначає одиниці тисяч, на шостому місці — сотні тисяч тощо.

Школярі читають числа, записані в таблиці розрядів і класів; учаться визначати число одиниць кожного класу в числі. Після цього учням пропонується переписати шестицифрові числа і підкреслити в кожному числі клас тисяч.

Другий клас — клас тисяч			Перший клас — клас одиниць		
VI/III	V/II	IV/I	III	II	I
розряд			розряд		
сотні тисяч	десятки тисяч	одиниці тисяч	сотні	десятки	одиниці
6	7	0	4	5	0
	1	2	3	0	7
		7	0	0	1
5	3	1	8	0	0

Школярі записують числа з вказуванням їхнього класного складу за наведеною вище пам'яткою, наприклад: шістсот сімдесят одиниць класу тисяч і чотириста п'ятдесят одиниць класу одиниць.

Можна пропонувати учням завдання на запис числа з вказуванням числа одиниць кожного розряду першого та другого класів.

1. Запишіть число, яке містить 2 одиниці II розряду першого класу, 7 одиниць III розряду першого класу, 5 одиниць V (II) розряду другого класу.

[Це число 50 720.]

2. Запишіть число, яке містить 7 одиниць I розряду першого класу, 8 одиниць III розряду першого класу, 12 одиниць V (II) розряду другого класу.

[Це число 120 807.]

Учні вчаться читати багатоцифрові числа на підставі їх розбиття на класи за наведеною вище пам'яткою.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТЬ «ЧОТИРИЦИФРОВЕ», «П'ЯТИЦИФРОВЕ» ТА «ШЕСТИЦИФРОВЕ» ЧИСЛА

Учні визначають загальну кількість сотень тисяч, десятків тисяч, одиниць тисяч, сотень, десятків, одиниць. Для того щоб дізнатися, скільки в числі сотень тисяч, потрібно прикрити в ньому п'ять цифр справа, тому що розряд сотень тисяч стоїть на шостому місці. Для того щоб дізнатися, скільки в числі всього десятків тисяч, потрібно прикрити в ньому справа чотири цифри, тому що розряд десятків тисяч стоїть на п'ятому місці. Учитель повинен досягнути того, щоб учні чітко розпізнавали поняття, наприклад, «загальна кількість десятків» і «цифра десятків» тощо.

Школярі виконують додавання і віднімання числа 1, додавання і віднімання на підставі розрядного складу числа, наприклад: $124\,000+200$, $124\,000+20$, $43\,690-90$, $43\,690-600$. Дії виконуються за загальним алгоритмом.

Далі учні вчаться давати характеристику багатоцифровим числам за планом (наприклад, дамо характеристику числу 56 709).

- *Найвищий розряд у числі; вид числа* (найвищий розряд — десятки тисяч, вид числа — п'ятицифрове число).
- *Десятковий склад числа; загальна кількість одиниць кожного розряду* (у числі 5 десятків тисяч, 6 одиниць тисяч, 7 сотень, 0 десятків і 9 одиниць, або 9 одиниць I розряду першого класу, 0 одиниць II розряду першого класу, 7 одиниць III розряду першого класу, 6 одиниць IV (I) розряду другого класу, 5 одиниць V (II) розряду другого класу; у числі 56 709 всього 56 тисяч, 567 сотень, 5670 десятків і 56 709 одиниць).
- *Скільки в числі всього одиниць кожного класу* (у числі 56 тисяч і 709 одиниць, або 56 одиниць другого класу та 709 одиниць першого класу).
- *Подання числа у вигляді суми розрядних доданків, у вигляді суми класних чисел* ($56\,709=50\,000+6000+700+9$, $56\,709=56\,000+709$).
- *Які цифри використовуються для запису числа; які повторюються* (для запису числа використовуються п'ять різних цифр: 5, 6, 7, 0, 9).
- *Місце числа в натуральному ряді, «сусіди» числа* (попереднє число 56 708, наступне — 56 710).
- *Способи отримання числа*
  ($56\,708+1=56\,709$, $56\,710-1=56\,709$,
  $50\,000+6000+700+9=56\,709$, $56\,000+709=56\,709$).

ДЕСЯТКОВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ

Спосіб лічби, коли 10 одиниць нижчого розряду утворюють 1 одиницю вищого розряду, називається **десятковою системою числення**. Десяткове групування чисел зумовило появу понять «розряд», «розрядні числа», «розрядні одиниці». Три перші розряди утворюють клас одиниць, а три наступні розряди — клас тисяч. При усній нумерації — при читанні чисел — спочатку читаємо число класу тисяч, а потім число класу одиниць. Письмова нумерація спирається на позиційний принцип запису числа: значення цифри в записі числа залежить від того, яке місце (яку позицію) вона займає. Якщо цифру переставити на 1 позицію ліворуч, то число збільшиться в 10 разів, а якщо праворуч — то число зменшиться в 10 разів.

Зазначимо, що після введення поняття «клас» для порівняння багатоцифрових чисел можна застосовувати спосіб покласного порівняння. Порівнюються числа класу тисяч: більше те число, у якому число класу тисяч більше. Якщо числа класу тисяч рівні, то порівнюємо числа класу одиниць: більше те число, у якому число класу одиниць більше.

Повернемося до завдання: порівняти числа 25 100 та 25 010. Міркуємо так.

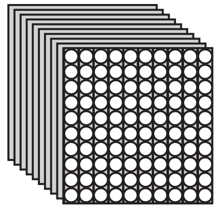
- У першому числі 25 тисяч і в другому числі 25 тисяч; числа класу тисяч рівні, тому переходимо до порівняння чисел класу одиниць.
- У першому числі 100 одиниць, а в другому 10; 100 одиниць більше ніж 10 одиниць, тому $25\,100 > 25\,010$.

Водночас існує й інший підхід, який втілено в деяких підручниках математики. Цей підхід, аналогічно до розгортання нумерації чисел у межах 100 і в межах 1000, передбачає спочатку формування поняття про тисячу як про складену лічильну одиницю, лічбу тисячами — одержання десятків та сотень тисяч. Більш детально розглянемо методичний підхід, коли спочатку вводиться нова лічильна одиниця — тисяча, а потім відразу дається поняття про класи. Цей методичний підхід має назву **покласове вивчення нумерації багатоцифрових чисел**.

Так само, як і при вивченні нумерації чисел у межах 1000, актуалізуємо знання учнів про лічильні одиниці та їх співвідношення. Учні лічать одиницями, десятками, сотнями. Установлюємо, що 10 од. = 1 д., 10 д. = 1 с., 10 с. = 1 тис. Результати лічби записуємо.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Так, учням пропонується прочитати числа, які записані в кожному стовпчику, у кожному рядку, та відповісти на запитання: «Що в записі чисел кожного стовпчика означають однакові цифри? Якими лічильними одиницями рахували в кожному рядку?» Пропонуємо учням прочитати останнє число третього рядка. Запитуємо, скільки в ньому сотень. Пропонуємо додати ще одну сотню. Запитуємо, скільки буде сотень. [10 сотень складають нову лічильну одиницю — 1 тисячу.]



1 тисяча

Запитуємо учнів, чи вважають вони, що тисячі — це новий розряд. Пропонуємо спробувати записати тисячу. Запитуємо, скільки в записі буде нулів.

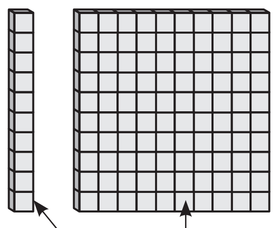
Пропонуємо порахувати новою лічильною одиницею до дев'яти тисяч та записати одержані числа.

Просимо учнів прочитати останнє число. Запитуємо, скільки в ньому тисяч. Пропонуємо додати ще одну тисячу. Запитуємо, скільки буде тисяч. [*10 тисяч складають 1 десяток тисяч.*]

Запитуємо учнів, чи вважають вони, що десятки тисяч — це новий розряд. Пропонуємо спробувати записати десяток тисяч. Запитуємо, скільки в записі буде нулів.

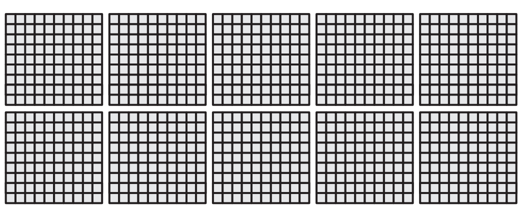
Пропонуємо порахувати десятками тисяч до дев'яти десятків тисяч та записати одержані числа.

Просимо учнів прочитати останнє число. Запитуємо, скільки в ньому десятків тисяч. Пропонуємо додати ще один десяток тисяч. Запитуємо, скільки буде десятків тисяч. [*10 десятків тисяч складають 1 сотню тисяч.*]



Запитуємо учнів, чи вважають вони, що сотні тисяч — це новий розряд.

Пропонуємо полічити сотнями тисяч та записати одержані числа. [*10 сотень тисяч складають 1 тисячу тисяч — 1 мільйон.*]



1 мільйон

Учні розглядають числа кожного рядка одержаної таблиці.

Просимо школярів назвати числа I розряду — розряду одиниць; числа II розряду — розряду десятків; числа III розряду — розряду сотень.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000	70 000	80 000	90 000
100 000	200 000	300 000	400 000	500 000	600 000	700 000	800 000	900 000

Запитуємо учнів, якими лічильними одиницями ми рахували. [Ми рахували одиницями, тому зазначені розряди складають перший клас — *клас одиниць*.]

Просимо учнів назвати числа IV розряду — розряду тисяч; числа V розряду — розряду десятків тисяч; числа VI розряду — розряду сотень тисяч.

Запитуємо учнів, якими лічильними одиницями ми рахували. [Ми рахували тисячами, тому зазначені розряди складають другий клас — *клас тисяч*.]

Другий клас — клас тисяч			Перший клас — клас одиниць		
VI/III	V/II	IV/I	III	II	I
розряд			розряд		
сотні тисяч	десятки тисяч	одиниці тисяч	сотні	десятки	одиниці

Запитуємо учнів, як вони вважають, чому клас одиниць називається першим класом, а клас тисяч — другим класом.

Пропонуємо порівняти клас одиниць і клас тисяч. Запитуємо, що в них спільне; чим вони відрізняються.

Просимо учнів припустити, скільки розрядів буде в наступному класі — класі мільйонів. Запитуємо, як би вони назвали ці розряди.

Далі аналізується запис розрядних чисел.

Запитуємо, скільки цифр використано для запису чисел у кожному рядку; як називаються такі числа.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000	70 000	80 000	90 000
100 000	200 000	300 000	400 000	500 000	600 000	700 000	800 000	900 000

Наступним кроком є опрацювання послідовності чисел у натуральному ряді. Учні згадують, як одержати наступне число; лічать, починаючи від 997; доходять висновку, що за найбільшим трицифровим числом йде найменше чотирицифрове число. Школярі визначають місце круглих чисел 1000, 4000, 6000, 8000 тощо в натуральному ряді; лічать у прямому і зворотному порядках у заданих межах (від 1055 до 1072).

Відразу школярі приступають до читання багатоцифрових чисел, що подані в таблиці розрядів і класів.

Другий клас — клас тисяч			Перший клас — клас одиниць		
VI/III	V/II	IV/I	III	II	I
розряд			розряд		
сотні тисяч	десятки тисяч	одиниці тисяч	сотні	десятки	одиниці
			4	3	7
		7	0	1	2
	1	6	9	0	1
8	2	7	0	0	0
	5	6	0	0	0
		4	6	9	2
	7	2	0	0	4
3	2	6	0	0	0

Після цього учні переходять до запису багатоцифрових чисел у таблиці розрядів і класів із вказуванням їхнього розрядного складу, а далі — і без нього. Нарешті, учні самі записують у зошитах багатоцифрові числа, причому варіації завдань можуть бути такими.

Запишіть числа:
- 143 тисячі 456 одиниць, 50 тисяч 8 одиниць, 9 тисяч 324 одиниці, 890 тисяч 56 одиниць, 43 тисячі 10 одиниць, 3 тисячі 435 одиниць, 119 тисяч;
- 46 одиниць другого класу та 564 одиниці першого класу, 95 одиниць другого класу та 29 одиниць першого класу, 527 одиниць другого класу та 7 одиниць першого класу, 3 одиниці другого класу і 50 одиниць першого класу;
- чотириста двадцять дев'ять тисяч вісімсот тридцять чотири, дев'ятнадцять тисяч сімдесят, вісімсот дев'яносто три тисячі сім, три тисячі двадцять чотири.

На наступному етапі розглядаються способи утворення багатоцифрових чисел з одиниць різних розрядів, а також способом прилічування та відлічування 1. Після цього пропонується порівняти багатоцифрові числа трьома способами (за місцем числа в натуральному ряді, порозрядне і покласне порівняння).

Заміна багатоцифрового числа сумою розрядних доданків вводиться одночасно із заміною суми, у якій одиниці кожного розряду подані окремо, багатоцифровим числом.

І, нарешті, вводяться випадки додавання і віднімання багатоцифрових чисел на основі нумерації.

Від визначення загальної кількості одиниць певного розряду учні переходять до заміни круглого числа більшими лічильними одиницями, а від цього — до додавання та віднімання, множення та ділення круглих чисел способом укрупнення розрядних одиниць.

2.2.6. Методика вивчення додавання і віднімання багатоцифрових чисел

Очікувані результати навчання здобувачів освіти див. за посиланням.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ НЕІМЕНОВАНИХ ЧИСЕЛ

На перших уроках здійснюється узагальнення вивчених раніше властивостей додавання (переставної і сполучної) та ілюструються різноманітні випадки їх практичного застосування для раціоналізації обчислень.

При виконанні завдань учитель звертає увагу учнів на те, що застосування властивостей додавання допомагає спростити обчислення, і пропонує обрати раціональний спосіб міркування для знаходження значень виразів: $300 + 35 + 25$; $24 + 73 + 26 + 7$.

Надалі під час усних обчислень необхідно постійно звертати увагу дітей на доцільність застосування вивчених властивостей додавання з урахуванням особливостей конкретних виразів.

При вивченні додавання і віднімання багатоцифрових чисел ми продовжуємо формувати навички усних обчислень. Для усних обчислень у межах багатоцифрових чисел розглядаються випадки додавання і віднімання на підставі розрядного складу числа: $35\,000 + 900 = 35\,900$; $35\,900 - 900 = 35\,000$; $35\,900 - 35\,000 = 900$, а також випадки, які зводяться до обчислень у межах 100 та 1000 на підставі укрупнення розрядних одиниць:

$72\ 000 + 800 = 720$ с. $+ 8$ с. $= 728$ с. $= 72\ 800$;

$3000 - 1800 = 30$ с. $- 18$ с. $= 12$ с. $= 1200$.

У концентрі «Багатоцифрові числа» паралельно з усними обчисленнями продовжується робота з формування навичок письмового додавання і віднімання.

Письмове додавання і віднімання спирається на знання нумерації багатоцифрових чисел (читання і запис, знання їхнього класного і розрядного складу, співвідношення розрядних одиниць), а також на вміння виконувати письмове додавання і віднімання чисел у межах 1000. Тому завдання, які актуалізують ці знання, повинні бути підготовкою перед ознайомленням із письмовим прийомом додавання і віднімання багатоцифрових чисел.

При ознайомленні з письмовим додаванням багатоцифрових чисел можна застосовувати аналогію. Наприклад, учні коментують розв’язання.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}427\\368\\\hline 795\end{array}\end{array}$$

Далі школярам пропонуються випадки додавання чотирицифрових чисел, а потім — п’ятицифрових і шестицифрових. Учні порівнюють кожний наступний випадок додавання з попереднім; з’ясовують, чи можуть попередні обчислення допомогти знайти результат поданої суми, і роблять висновок, що залишилося додати тільки одиниці вищого розряду.

$$+\begin{array}{r}427\\368\\\hline 795\end{array}\qquad +\begin{array}{r}1427\\2368\\\hline 3795\end{array}$$

На підставі міркування за аналогією учні роблять висновок, що чотирицифрові числа додаються так само, як і трицифрові. Аналогічно робляться висновки про додавання п’яти- і шестицифрових чисел.

$$+\begin{array}{r}427\\368\\\hline 795\end{array}\qquad +\begin{array}{r}1427\\2368\\\hline 3795\end{array}\qquad +\begin{array}{r}21\,427\\32\,368\\\hline 53\,795\end{array}\qquad +\begin{array}{r}321\,427\\132\,368\\\hline 453\,795\end{array}$$

Після виконання аналогічних завдань учні роблять висновок, що письмове додавання і віднімання багатоцифрових чисел здійснюється так само, як і додавання і віднімання трицифрових чисел.

Аналогічно діти ознайомлюються з відніманням багатоцифрових чисел.

ПАМ'ЯТКА

Письмове додавання і віднімання багатоцифрових чисел

1. Записую числа стовпчиком: розряд під відповідним розрядом.
2. Виконую $\frac{\text{додавання}}{\text{віднімання}}$ порозрядно, починаючи з нижчого розряду (справа наліво).

   Пам'ятаю, що 10 одиниць нижчого розряду складають 1 одиницю вищого розряду.

Письмове додавання і віднімання вивчається паралельно. Це дозволяє актуалізувати взаємозв'язок цих арифметичних дій і виконувати перевірку правильності розв'язання, а також зберігає час на опрацювання кожного вміння, розвиває гнучкість мислення, тому що майже одночасно учні виконують взаємно обернені дії.

На першому уроці вивчення алгоритму письмового додавання і віднімання багатоцифрових чисел учням традиційно пропонуються такі числа, які містять однакове число знаків; на наступних уроках — у записі чисел міститься вже різне число знаків.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 58\,769 \\ 6458 \end{array} \\ \hline 65\,227 \end{array}$$

Труднощі являють собою випадки віднімання, коли в записі зменшуваного є кілька нулів підряд. Тому пояснення повинно бути ґрунтовним і детальним. На етапі підготовчої роботи слід повторити особливості десяткової системи числення, співвідношення між розрядними одиницями. Діти повинні добре знати, що кожна одиниця вищого розряду містить 10 одиниць сусіднього нижчого розряду. Також потрібно актуалізувати випадки віднімання числа 1 на підставі нумерації чисел, наприклад: $10\,000-1$. $10\,000$ — це 9 тис. 9 с. 9 д. 10 од.. 9 тис. 9 с. 9 д. 10 од. $-$ 1 од. $=$ 9 тис. 9 с. 9 д. 9 од. $=9999$.

Починаємо віднімання з розряду одиниць, але від 0 не можна відняти 2, тому потрібно позичити 1 десяток. У розряді десятків стоїть 0, тому потрібно позичити 1 сотню. Визначаємо, скільки десятків в 1 сотні.

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 4700 \\ 32 \end{array} \\ \hline 4668 \end{array}$$

[1 с. = 10 д.] Тепер можемо позичити 1 десяток. Замінюємо 1 десяток одиницями: 1 д. = 10 од. 10 од. – 2 од. = 8 од. — пишемо в розряді одиниць. Переходимо до віднімання десятків: було 10 десятків, позичили 1 десяток, залишилося 9 десятків. 9 д. – 3 д. = 6 д. — пишемо в розряді десятків. Переходимо до сотень: було 7 сотень, позичили 1 сотню, залишилося 6 сотень. Пишемо під сотнями цифру 6, а цифру 4 — під тисячами.

Пояснення на першому уроці повинні бути розгорненими, з вказуванням назв розрядів.

Далі розглядаються прийоми додавання трьох і більше доданків. Учитель пропонує знайти значення суми: 3408 + 237 569 + 18 440. Учні можуть обчислити цю суму таким чином: додати перші два доданки і до одержаного результату додати третій доданок. Учитель звертає увагу учнів на те, як вони знаходили суми чисел (письмово — у стовпчик), і запитує, чи можна письмовий прийом додавання застосувати відразу для трьох доданків. Далі з'ясовується, яке число зручно записати першим, другим, третім.

$$\begin{array}{r} 237569 \\ +\ \ 18440 \\ 3408 \\ \hline 259417 \end{array}$$

Звертаємо увагу, що при такому записі знак «+» пишеться тільки один раз. Учні виконують додавання цим способом і порівнюють результат із тим, який отримали раніше.

Слід зазначити, що віднімання трьох чисел аналогічним чином виконувати не можна — це одна з імовірних помилок учнів.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ІМЕНОВАНИХ ЧИСЕЛ

Поряд із додаванням і відніманням багатоцифрових чисел учням пропонується виконати додавання і віднімання іменованих чисел.

Якщо іменовані числа записуються з назвою лише однієї одиниці вимірювання, — це **просте іменоване число**, наприклад: 345 г. Якщо іменоване число записується за допомогою кількох одиниць вимірювання, то це **складене іменоване число**, наприклад: 4 ц 67 кг.

З метою формування в учнів навичок додавання та віднімання іменованих чисел пропонуємо школярам достатню кількість завдань такого типу.

1. Обчисліть: 53 м 08 см – 9 м 37 см.

Існують два способи обчислення.

ПАМ'ЯТКА

Додавання і віднімання складених іменованих чисел

I спосіб

1. Подаю обидва числа у вигляді простих іменованих чисел однакових найменувань.
2. Виконую арифметичну дію з простими іменованими числами, як зі звичайними натуральними числами.
3. Подаю результат у вигляді складеного іменованого числа.

II спосіб

1. Записую іменовані числа так, щоб числа одних найменувань були одне під одним.
2. Виконую дії з числами, поданими в менших одиницях вимірювання.
3. Виконую дії з числами, поданими в більших одиницях вимірювання.

I спосіб

53 м 08 см = 5308 см; 9 м 37 см = 937 см.

$$\begin{array}{r} 5308\ (\text{см}) \\ -\ \ 937\ (\text{см}) \\ \hline 4371\ (\text{см}) \end{array}$$

4371 см = 43 м 71 см

II спосіб

Від 8 см не можна відняти 37 см, тому позичаємо 1 м і замінюємо його сантиметрами: 1 м = 100 см. 100 см + 8 см = 108 см; 108 см − 37 см = 71 см. Записуємо число сантиметрів під сантиметрами. Було 53 м, позичили 1 м, залишилося 52 м. Від 52 м віднімаємо 9 м — буде 43 м. Записуємо число метрів під метрами.

$$\begin{array}{r} 108\phantom{\ \text{см}} \\ -\ 53\ \text{м}\ 08\ \text{см} \\ 9\ \text{м}\ 37\ \text{см} \\ \hline 43\ \text{м}\ 71\ \text{см} \end{array}$$

Аналогічно виконують додавання і віднімання з іменованими числами, поданими в одиницях вимірювання маси, вартості, часу.

2. Знайдіть суму та різницю іменованих чисел: 14 ц 70 кг та 9 ц 09 кг.

14 ц 70 кг = 1470 кг;

9 ц 09 кг = 909 кг

I спосіб

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}1470\,(\text{кг})\\ 909\,(\text{кг})\\ \hline 2379\,(\text{кг})\end{array} \quad -\begin{array}{r}1470\,(\text{кг})\\ 909\,(\text{кг})\\ \hline 561\,(\text{кг})\end{array}\end{array}$$

23 ц 79 кг 5 ц 61 кг

II спосіб

$$+\begin{array}{r}14\text{ ц }70\text{ кг}\\ 9\text{ ц }09\text{ кг}\\ \hline 23\text{ ц }79\text{ кг}\end{array} \quad -\begin{array}{r}14\text{ ц }70\text{ кг}\\ 9\text{ ц }09\text{ кг}\\ \hline 5\text{ ц }61\text{ кг}\end{array}$$

3. Знайдіть суму та різницю іменованих чисел: 19 грн 73 к. і 6 грн 89 к.

19 грн 73 к. = 1973 к.;
6 грн 89 к. = 689 к.

I спосіб

$$+\begin{array}{r}1973\,(\text{к.})\\ 689\,(\text{к.})\\ \hline 2662\,(\text{к.})\end{array} \quad -\begin{array}{r}1973\,(\text{к.})\\ 689\,(\text{к.})\\ \hline 1284\,(\text{к.})\end{array}$$

26 грн 62 к. 12 грн 84 к.

II спосіб

$$+\begin{array}{r}19\text{ грн }73\text{ к.}\\ 6\text{ грн }89\text{ к.}\\ \hline 25\text{ грн }162\text{ к.}\end{array} \quad -\begin{array}{r}19\text{ грн }73\text{ к.}\\ 6\text{ грн }89\text{ к.}\\ \hline 12\text{ грн }84\text{ к.}\end{array}$$

26 грн 62 к.

2.2.7. Методика вивчення множення багатоцифрового числа на одноцифрове

Перенесення прийому письмового множення на випадки множення багатоцифрового числа на одноцифрове число

Переносимо алгоритм множення трицифрового числа на одноцифрове на випадки множення багатоцифрового числа на одноцифрове шляхом виконання такого завдання.

Пропонуємо учням виконати письмове множення чисел 87 і 7, коментуючи кожен етап розв'язання. Зіставляємо письмове множення чисел 387 і 7 з попереднім добутком. Учні помічають, що зміни відбулися в першому множнику, — з'явився розряд сотень. З'ясовуємо, як ця зміна впливає на розв'язання, — потрібно виконати множення 3 сотень на 7.

$$\times\begin{array}{r}87\\ 7\\ \hline 609\end{array} \qquad \times\begin{array}{r}387\\ 7\\ \hline 2709\end{array}$$

Далі учням пропонується порівняти письмове множення чисел 5387 і 7 з попереднім добутком.

$$\times\begin{array}{r}5387\\ 7\\ \hline \end{array}$$

У порівнюваних добутках однаковий другий множник і є однакові цифри в записі першого множника, але в попередньому добутку перший множник — це трицифрове число, а в цьому — чотирицифрове число. До першого множника в попередньому добутку зліва приписали ще одну цифру. З'ясовуємо, як це впливає на значення добутку. Ми вже знаємо результати при множенні одиниць, десятків, сотень; залишилося лише знайти результат множення 5 тисяч на 7.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 5387 \\ 7 \end{array} \\ \hline 37709 \end{array}$$

Порівнюємо наступний добуток із попереднім.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 25387 \\ 7 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Працюємо аналогічно.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 25387 \\ 7 \end{array} \\ \hline 177709 \end{array}$$

У результаті порівняння трьох добутків учні роблять висновок: будь-яке багатоцифрове число можна множити на одноцифрове число так само, як і трицифрове.

При письмовому множенні можна пояснювати розв'язання коротко, не називаючи кожний раз, одиниці якого розряду множимо.

Наприклад: 8 множимо на 6, отримуємо 48; 8 пишемо, 4 запам'ятовуємо. 5 множимо на 6, отримуємо 30; 30 і 4 буде 34; 4 пишемо, 3 запам'ятовуємо. 1 множимо на 6, отримуємо 6; 6 і 3 буде 9; пишемо 9. 7 множимо на 6 буде 42; пишемо 42.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 7158 \\ 6 \end{array} \\ \hline 42948 \end{array}$$

Письмове множення одноцифрового числа на багатоцифрове число

Прийом множення одноцифрового числа на багатоцифрове зводиться до раніше розглянутого прийому множення багатоцифрового числа на одноцифрове число способом перестановки множників.

Для актуалізації необхідних знань учитель нагадує учням про те, що вони вже вміють множити багатоцифрове число на одноцифрове, і пропонує здогадатися, що потрібно зробити, щоб помножити одноцифрове число на багатоцифрове. [Можна переставити множники; тоді отримуємо випадок множення багатоцифрового числа на одноцифрове; знайшовши значення цього виразу, отримуємо такий самий результат, як і при множенні одноцифрового числа на багатоцифрове.]

Письмове множення багатоцифрового числа, що містить нуль у середині запису, на одноцифрове число

На етапі підготовчої роботи слід актуалізувати:

1) правила множення з числом нуль: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$;
2) 3 од. · 0 = 0 од., 5 д. · 0 = 0 д., 7 с. · 0 = 0 с.

На етапі ознайомлення можна запропонувати учням самостійно прокоментувати, як знайти значення виразу.

$$\times \begin{array}{r} 7108 \\ 6 \\ \hline 42648 \end{array}$$

Письмове множення багатоцифрового числа, що закінчується нулем (нулями), на одноцифрове число

На етапі підготовчої роботи учні виконують множення круглого числа на одноцифрове, використовуючи прийом укрупнення розрядних одиниць: 380 · 9 = 38 д. · 9 = 342 д. = 3420.

Міркуємо так. Число десятків помножили на одноцифрове число; одержаний результат подали в одиницях, приписавши справа один нуль, тобто стільки, скільки нулів було наприкінці першого множника.

На етапі ознайомлення учням можна запропонувати розглянути записи й сказати, як записаний другий множник під першим: де опинилися нулі, які записані наприкінці першого множника. [Другий множник записаний під першою цифрою, відмінною від нуля, так, щоб нулі залишилися справа.]

$$\times \begin{array}{l} 380 \\ \ \ 9 \\ \hline 342\ \text{д.} \\ 3420 \end{array} \qquad \times \begin{array}{l} 8400 \\ \ \ 7 \\ \hline 588\ \text{с.} \\ 58\ 800 \end{array} \qquad \times \begin{array}{l} 69000 \\ \ \ 4 \\ \hline 276\ \text{т.} \\ 276\ 000 \end{array}$$

Просимо учнів пояснити, які розрядні одиниці ми множили. [Множили число десятків, число сотень і число тисяч.] Множники підписали таким чином для того, щоб множити лише число десятків (сотень, тисяч) на одноцифрове число. Пропонуємо учням назвати, скільки десятків (сотень, тисяч) одержали в добутку; як подали ці розрядні числа в одиницях [приписали праворуч один (два, три) нулі]. Просимо учнів порівняти число нулів у кожній парі: у першому множнику і в добутку [наприкінці добутку стільки нулів, скільки їх у першому множнику].

Зручно відділити нулі в записі першого множника рискою; перемножити числа, не звертаючи уваги на нулі, до добутку приписати справа стільки нулів, скільки їх у першому множнику.

ПАМ'ЯТКА
Письмове множення числа, що закінчується нулем (нулями), на одноцифрове число

1. Записую множники стовпчиком так, щоб нулі залишилися справа.
2. Виконую множення, не зважаючи на нулі.
3. Визначаю кількість нулів в першому множнику.
4. Дописую стільки ж нулів до результату справа.

2.2.8. Методика вивчення ділення багатоцифрового числа на одноцифрове

Прийоми письмового ділення багатоцифрового числа на одноцифрове вводяться в порядку їх поступового ускладнення.

Повторивши прийом письмового ділення трицифрового числа на одноцифрове, потрібно перейти до пояснення прийому письмового ділення чотирицифрового числа на одноцифрове.

Перенесення алгоритмів ділення з трицифрового числа на чотирицифрове корисно виконувати за допомогою випадків ділення, коли один із них містить у собі інший.

$$\begin{array}{r|l} 378 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 6378 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{} & \end{array}$$

Спочатку розглядаються випадки ділення багатоцифрового числа на одноцифрове, коли **число одиниць вищого розряду більше за дільник і в записі значення частки немає нулів.**

Ділення починаємо з вищого розряду: у вищому розряді 3 тисячі; 3 тисячі можна поділити на 2 так, щоб отримати хоча б одну тисячу. Оскільки перше неповне ділене тисячі, то найвищий розряд у значенні частки тисячі; у значенні частки буде чотири цифри. Ділимо перше неповне ділене 3 тисячі на 2 — одержуємо 1; у значенні частки на місці тисяч записуємо цифру 1. Множенням дізнаємося, скільки тисяч розділилося, — 2 тисячі розділилися. Відніманням дізнаємося, скільки тисяч не розділилося, — 1 тисяча не розділилася. Перевіряємо: остача 1 менша від дільника 2; цифру значення частки знайдено правильно.

$$\begin{array}{r|l}
-3662 & 2 \\ \cline{2-2}
\underline{2} & 1831 \\
-16 & \\
\underline{16} & \\
-6 & \\
\underline{6} & \\
-2 & \\
\underline{2} & \\
0 &
\end{array}$$

З остачі і сотень діленого утворюємо друге неповне ділене — 16 сотень. Ділимо 16 сотень на 2 — одержуємо 8; у значенні частки в розряді сотень записуємо цифру 8. Множенням дізнаємося, скільки сотень розділилося, — усі сотні розділилися.

Оскільки всі сотні розділилися, то переходимо до наступного розряду. 6 десятків — третє неповне ділене. Ділимо 6 десятків на дільник — одержуємо 3. Пишемо цифру 3 на місці десятків у значенні частки. Дізнаємося, скільки десятків розділилося, дією множення. Усі десятки розділилися.

Четверте неповне ділене — 2 одиниці. Ділимо 2 одиниці на дільник 2 — одержуємо 1. Записуємо цифру 1 у розряді одиниць у значенні частки. Дізнаємося, скільки одиниць розділилося, дією множення. Усі одиниці розділилися. Ділення закінчено.

Далі розглядаються випадки письмового ділення багатоцифрового числа на одноцифрове, коли **число одиниць вищого розряду діленого менше за дільник і в записі значення частки немає нулів**. Особливість прийому — перше неповне ділене — двоцифрове число, яке утворено одиницями двох вищих розрядів. Це повинно бути предметом спеціального розгляду.

На етапі підготовчої роботи розглядаємо знайомий випадок 336 : 8.

На етапі ознайомлення пропонуємо учням проблемне завдання: знайти значення частки чисел 1364 і 2. Учні переносять уже відомий їм спосіб міркування на випадок ділення чотирицифрового числа на одноцифрове.

$$
\begin{array}{r|l}
-1364 & 2 \\ \cline{2-2}
\underline{12} & 681 \\
-16 & \cdot\cdot\cdot \\
\underline{16} & \\
-4 & \\
\underline{4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Ділення починаємо з вищого розряду: у вищому розряді 1 тисяча. 1 тисячу не можна поділити на 2 так, щоб отримати хоча б одну тисячу, тому переходимо до наступного розряду. Отже, перше неповне ділене — 13 сотень. Оскільки перше неповне ділене сотні, то найвищий розряд частки — сотні. Щоб записати сотні, потрібно три цифри, тому в значенні частки буде три цифри. Ділимо перше неповне ділене 13 сотень на 2 — одержуємо 6; у значенні частки записуємо цифру 6 на місці сотень. Множенням дізнаємося, скільки сотень розділилося, — 12 сотень розділилося. Відніманням дізнаємося, скільки сотень не розділилося, — 1 сотня не розділилася. Порівнюємо остачу з дільником: 1 менше від 2, тому цифру сотень значення частки знайдено правильно.

З остачі і десятків діленого утворюємо друге неповне ділене — 16 десятків. Ділимо 16 десятків на 2 — одержуємо 8; записуємо цифру 8 у значенні частки в розряді десятків. Множенням дізнаємося, скільки десятків розділилося, — усі десятки розділилися.

Оскільки всі десятки розділилися, то переходимо до наступного розряду: 4 одиниці — третє неповне ділене. Ділимо 4 одиниці на дільник 2 — буде 2. Пишемо цифру 2 на місці одиниць у значенні частки. Дізнаємося, скільки одиниць розділилося, дією множення, — усі одиниці розділилися. Ділення закінчено.

На етапі закріплення прийому учні повинні знаходити значення виразів на ділення не тільки чотирицифрових, але й п'ятита шестицифрових чисел на одноцифрове число.

Після знаходження значень декількох виразів із розгорненим поясненням учитель показує, як слід міркувати скорочено: можна користуватися наведеною вище пам'яткою, не називаючи, одиниці якого розряду одержали в значенні частки.

$$\begin{array}{r|l} 15474 & 6 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Наприклад, при діленні 15 474 на 6 міркуємо так: «Перше неповне ділене 15 тисяч. У частці чотири цифри. Ділимо 15 на 6 — одержуємо 2; множимо 2 на 6 — одержуємо 12; віднімаємо 12 від 15 — одержуємо 3; це менше від 6. Друге неповне ділене 34...»

Надалі учні повинні користуватися переважно скороченим міркуванням, повертаючись до розгорненого при розгляданні нових випадків ділення або розбираючи помилки в діленні.

Можливі помилки: учні неправильно знаходять цифри значення частки, тому одержують остачу, більшу за дільник. Необхідно слідкувати за тим, щоб учні не забували порівнювати остачу з дільником. Для цього корисні завдання на знаходження помилок, а також завдання на перевірку арифметичної дії ділення множенням.

Далі школярі вивчають випадки письмового ділення багатоцифрового числа на одноцифрове число, коли **в записі значення частки зустрічаються нулі**.

На етапі підготовчої роботи слід актуалізувати випадки ділення нуля одиниць, десятків, сотень на будь-яке число; випадки ділення з остачею, коли ділене менше від дільника, та вміння переводити більші розрядні одиниці в менші.

1. Знайдіть значення частки чисел: 0 од. : 5, 0 д. : 5, 0 с. : 9.

[0 од. : 5 = 0 од., 0 д. : 5 = 0 д., 0 с. : 9 = 0 с.]

2. Виконайте ділення з остачею: 2 : 6, 3 : 7, 6 : 9.

[2 : 6 = 0 (ост. 2), тому що $0 \cdot 6 + 2 = 2$;
3 : 7 = 0 (ост. 3), тому що $0 \cdot 7 + 3 = 3$;
6 : 9 = 0 (ост. 6), тому що $0 \cdot 9 + 6 = 6$.]

Якщо ділене менше за дільник, то в значенні частки одержуємо нуль, а все ділене є остачею.

3. Скільки одиниць у 8 д.? у 86 д.? Скільки десятків у 6 с.? у 63 с.?

[8 д. = 80 од.; 86 д. = 860 од.; 6 с. = 60 д.; 63 с. = 630 д.]

На етапі ознайомлення пропонуємо учням знайти значення часток на конкретних прикладах.

Нуль наприкінці запису значення частки. Пояснюємо так: третє неповне ділене — 0 одиниць; 0 одиниць ділимо на 9 — отримуємо 0 одиниць.

$$\begin{array}{r|l} -3330 & 9 \\ \underline{27} & \overline{370} \\ -63 & \\ \underline{63} & \\ -0 & \\ \underline{0} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -5648 & 8 \\ \underline{56} & \overline{706} \\ -4 & \\ \underline{0} & \\ -48 & \\ \underline{48} & \\ 0 & \end{array}$$

Нуль у середині запису значення частки. Міркуємо так: друге неповне ділене 4 десятки не можна розділити на 8 так, щоб одержати десятки, тому в значенні частки буде 0 десятків.

За кілька уроків можна показати учням скорочену форму запису.

У цих випадках можна усно множити на 0, пам'ятаючи отриманий результат, — у записі значення частки повинен стояти 0.

$$\begin{array}{r|l} -5648 & 8 \\ \underline{56} & \overline{706} \\ -48 & \\ \underline{48} & \\ 0 & \end{array}$$

Пропуск нуля в записі значення частки — типова помилка. Для її попередження доцільно пропонувати учням заздалегідь ставити крапки на місці цифр значення частки, коли ми визначаємо найвищий розряд і кількість цифр значення частки.

Також учні ознайомлюються зі скороченою формою запису письмового ділення, коли не записуються числа одиниць кожного розряду, що розділилися, а пишеться тільки остача й утворення наступного неповного діленого.

$$\begin{array}{r|l} -1351 & 7 \\ \underline{7} & \overline{193} \\ -65 & \\ \underline{63} & \\ -21 & \\ \underline{21} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1351 & 7 \\ \underline{65} & \overline{193} \\ \underline{21} & \\ 0 & \end{array}$$

2.2.9. Методика вивчення множення багатоцифрового числа на двоцифрове

Спочатку доцільно розглянути випадки **письмового множення багатоцифрового числа на двоцифрове число, яке закінчується нулем.**

Учні пояснюють усний прийом обчислення на підставі правила множення числа на добуток.

$731 \cdot 20 = 731 \cdot (2 \cdot 10) = (731 \cdot 2) \cdot 10 = 1462 \cdot 10 = 14\ 620$

$$\times\begin{array}{r} 731 \\ 2 \\ \hline 1462 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1462 \\ 10 \\ \hline 14620 \end{array}$$

Розв'язання можна записати коротше.

$$\times\begin{array}{r} 731 \\ 20 \\ \hline 14620 \end{array}$$

Оскільки на 10 помножити легко — потрібно до числа приписати справа один нуль, то зосередимося саме на множенні числа 731 на 2. Отже, записуємо 20 під першим множником так, щоб нуль залишився справа; виконаємо множення, не звертаючи увагу на нуль: $731 \cdot 2 = 1462$; до одержаного значення добутку справа припишемо нуль, — буде 14 620.

ПАМ'ЯТКА

Письмове множення на число, що закінчується нулями

1. Записую другий множник під першим так, щоб нулі залишилися справа.
2. Виконую множення, не зважаючи на нулі.
3. До одержаного добутку приписую справа стільки нулів, скільки їх у другому множнику.

Далі розглядаються випадки **письмового множення, коли обидва множники закінчуються нулями.**

Застосовуючи переставну властивість арифметичної дії множення, одержуємо такі розв'язання.

$70 \cdot 20 = 1400$

$(7 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) = 7 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 = (7 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 10) = 14 \cdot 100 = 1400$

$600 \cdot 40 = 24\ 000$

$(6 \cdot 100) \cdot (4 \cdot 10) = 6 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 10 = (6 \cdot 4) \cdot (100 \cdot 10) = 24 \cdot 1000 = 24\ 000$

Порівнюючи в кожному виразі множники і добуток, учні доходять висновку: у добутку стільки нулів, скільки їх в обох множниках разом.

Потім розглядаються складніші випадки, які усно обчислити важко.

$$\times\begin{array}{r} 7600 \\ 30 \\ \hline 288000 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1290 \\ 700 \\ \hline 903000 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 3710 \\ 50 \\ \hline 185500 \end{array}$$

ПАМ'ЯТКА

Множення чисел, що закінчуються нулями

1. Записую множники стовпчиком так, щоб нулі залишилися справа.
2. Виконую множення, не зважаючи на нулі.
3. Визначаю кількість нулів в обох множниках разом.
4. Дописую стільки ж нулів до результату справа.

Письмове множення багатоцифрового числа на двоцифрове число

Учні вже знайомі з алгоритмом письмового множення на двоцифрове число. На цьому етапі потрібно перенести відомий спосіб дії на випадки множення на двоцифрове число в межах багатоцифрових чисел.

Працюємо за відомим алгоритмом множення на двоцифрове число.

$$\begin{array}{rl} \times\; 32 & \\ 36 & \\ \hline 192 & \text{одиниці — I неповний добуток} \\ +\; 96 & \text{десятків — II неповний добуток} \\ \hline 1152 & \text{— добуток} \end{array}$$

Міркуємо так. Записуємо числа стовпчиком: одиниці під одиницями, десятки під десятками. Множимо одиниці другого множника — 6 одиниць — на перший множник 32, одержуємо 192 одиниці — це перший неповний добуток. Множимо десятки другого множника — 3 десятки — на перший множник 32, одержуємо 96 десятків — це другий неповний добуток. Додаємо неповні добутки, одержуємо добуток 1152.

Далі учні вчаться множити три- та чотирицифрове числа на двоцифрове, зокрема на число, що закінчується нулями, коли в добутку отримуємо п'яти- або шестицифрове число.

Окремо розглядається випадок множення багатоцифрового числа на 11. Учні помічають, що перший і другий неповні добутки дорівнюють першому множнику, але перший неповний добуток виражений одиницями, а другий неповний добуток — десятками. Отже, потрібно на місці першого неповного добутку записати перший множник, починаючи з розряду одиниць, а на

$$\begin{array}{r} \times\; 4567 \\ 11 \\ \hline +\; 4567 \\ 4567 \\ \hline 50237 \end{array}$$

місці другого неповного добутку — починаючи з розряду десятків; додати неповні добутки й одержати добуток.

На підставі порівняння виразів множення на одноцифрове і на двоцифрове число учні встановлюють відмінність: при множенні на одноцифрове число ми відразу одержуємо добуток, а при множенні на двоцифрове число — спочатку перший неповний добуток, потім другий неповний добуток і, додавши їх, одержуємо добуток. Так відбувається тому, що при множенні на двоцифрове число потрібно помножити не лише одиниці, а й десятки другого множника на перший множник.

Письмове множення багатоцифрового числа на трицифрове число

Прийом письмового множення на трицифрове число вводиться в порівнянні з прийомом письмового множення на двоцифрове число.

Спочатку порівнюємо усні прийоми обчислення.

$672 \cdot 23 = 672 \cdot (20 + 3) = 672 \cdot 20 + 672 \cdot 3$

$672 \cdot 423 = 672 \cdot (400 + 20 + 3) = 672 \cdot 400 + 672 \cdot 20 + 672 \cdot 3$

Порівнюючи ці дві рівності, учні помічають, що при множенні на двоцифрове число буде два неповні добутки, а при множенні на трицифрове число — три неповні добутки.

$672 \cdot 3 = 2016$, 2016 одиниць, — I неповний добуток.

$672 \cdot 20 = 13\ 440$, або 1344 десятки, — II неповний добуток

$672 \cdot 400 = 268\ 800$, або 2688 сотень, — III неповний добуток.

Отже, записуючи розв’язання стовпчиком, перший неповний добуток почнемо записувати під одиницями, другий — під десятками, а третій — під сотнями.

$$\begin{array}{rl}
\times\ 672 & \\
23 & \\
\hline
2016 & \text{— I неповний добуток} \\
+\ 1344 & \text{— II неповний добуток} \\
\hline
15456 & \text{— добуток}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\times\ 672 & \\
423 & \\
\hline
2016 & \text{— I неповний добуток} \\
1344 & \text{— II неповний добуток} \\
+\ 2688 & \text{— III неповний добуток} \\
\hline
284256 & \text{— добуток}
\end{array}$$

Особливо уважно слід розглянути випадок множення на трицифрове число, коли в середині запису другого множника є нуль.

$$\begin{array}{rl}
\times\ 483 & \\
306 & \\
\hline
2898 & \text{— I неповний добуток} \\
+\ 0 & \text{— II неповний добуток} \\
1449 & \text{— III неповний добуток} \\
\hline
147798 &
\end{array}$$

Показуємо учням скорочений запис.

$$
\begin{array}{r@{\;}l}
\times\;\; 483 & \\
306 & \\
\hline
+\;\; 2898 & \text{— I неповний добуток} \\
1449 & \text{— III неповний добуток} \\
\hline
147798 &
\end{array}
$$

Міркуємо так.

Множимо 6 одиниць другого множника на перший множник — одержуємо 2898 одиниць — це перший неповний добуток; підписуємо під одиницями.

Множимо 0 десятків другого множника на перший множник — одержуємо 0 десятків — це другий неповний добуток, ми його не пишемо.

Множимо 3 сотні другого множника на перший множник — одержуємо 1449 сотень — це третій неповний добуток, пишемо його під сотнями.

2.2.10. Методика вивчення ділення багатоцифрового числа на двоцифрове

Логіка вивчення письмового ділення багатоцифрового числа на двоцифрове число така сама, як і логіка вивчення письмового ділення трицифрового числа на двоцифрове число, — спочатку переносимо прийом письмового ділення трицифрового числа на кругле число на багатоцифрові числа. Після опанування учнями дії письмового ділення багатоцифрового числа на кругле двоцифрове число вводяться випадки письмового ділення багатоцифрового числа на двоцифрове, а потім і на трицифрове число. На цьому етапі вважається, що прийом письмового ділення учні засвоїли і мають його перенести на випадки ділення в межах багатоцифрових чисел.

Оскільки письмове ділення на кругле число передбачає заміну круглого числа добутком числа та розрядної одиниці, а потім послідовне ділення на розрядну одиницю й на число, то перед вивченням письмового ділення багатоцифрового числа на кругле двоцифрове число доцільно актуалізувати множення та ділення на розрядну одиницю. Докладніше методику актуалізації множення та ділення числа на розрядну одиницю див. за посиланням.

Письмове ділення багатоцифрового числа на кругле двоцифрове число

$$
\begin{array}{r|l}
-\,780 & \underline{30} \\
\underline{60} & \ddot{2}\ddot{6} \\
-\,180 & \\
\underline{180} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\longrightarrow 30 = 10 \cdot 3 \\
78 : 10 \approx 7;\ 7 : 3 \approx 2; \\
180 : 10 = 18;\ 18 : 3 = 6.
\end{array}
$$

Міркуємо так. Ділення починаємо з найвищого розряду: у найвищому розряді 7 сотень, 7 сотень не можна поділити на 30 так, щоб одержати хоча б одну сотню. Переходимо до наступного розряду: маємо 78 десятків — це перше неповне ділене.

Таким чином визначати перше неповне ділене нераціонально, тому що очевидно, що число сотень не можна поділити на двоцифрове число так, щоб одержати хоча б одну сотню. Тому відразу потрібно в діленому ліворуч відділити дві цифри і починати міркувати саме з числа десятків: 78 десятків можна поділити на 30 так, щоб одержати хоча б один десяток, тому 78 десятків — це перше неповне ділене.

Найвищий розряд частки — десятки, тому в значенні частки буде дві цифри.

Ділимо 78 десятків на 30. Для цього число 30 подаємо у вигляді добутку розрядної одиниці 10 та числа 3. Послідовно ділимо: $78:10 \approx 7$ (щоб поділити число на 10, достатньо справа прикрити в числі одну цифру): $7:3 \approx 2$. Пишемо в значенні частки на місці десятків цифру 2.

Дізнаємося дією множення, скільки десятків розділилося, — 60 десятків розділилося.

Дізнаємось дією віднімання, скільки десятків не розділилося, — 18 десятків не розділилося.

Перевіряємо, чи правильно знайдено цифру значення частки: остача 18 менша від дільника 30. Цифру значення частки знайдено правильно.

Утворюємо друге неповне ділене: 18 десятків — це 180 одиниць; 180 одиниць — друге неповне ділене.

Ділимо 180 одиниць на 30 послідовно: $180:10=18$; $18:3=6$. Пишемо цифру 6 у значенні частки на місці одиниць.

Дією множення дізнаємося, скільки одиниць розділилося, — розділилося 180 одиниць, усі одиниці розділилися. Ділення закінчено.

Пропонуємо учням порівняти наступну частку чисел із попередньою і встановити, чи можна міркувати так само при діленні на кругле число, як і в попередньому випадку.

$$\begin{array}{r|l} -24780 & 30 \\ \underline{240} & \dot{8}\dot{2}\dot{6} \\ -78 & \\ \underline{60} & \\ -180 & \\ \underline{180} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 30 \rightarrow 30 = 10 \cdot 3 \\ 247:10 \approx 24,\ 24:3=8; \\ 78:10 \approx 7,\ 7:3 \approx 2; \\ 180:10=18,\ 18:3=6. \end{array}$$

Міркуємо так. Перше неповне ділене 247 сотень, тому в значенні частки буде три цифри. Ділимо 247 на 30. $247:10 \approx 24$; $24:3=8$. Дізнаємося множенням, скільки сотень розділилося: 240 сотень розділилося. Дізнаємося відніманням, скільки сотень не розділилось: 7 сотень не розділилося. Порівнюємо остачу з дільником: 7 менше від 30, тому цифру сотень знайдено правильно. Утворюємо друге неповне ділене: 7 сотень $=70$ десятків. 70 десятків і ще 8 десятків буде 78 десятків — це друге неповне ділене. Ділимо 78 десятків на 30. $78:10 \approx 7$; $7:3 \approx 2$. Дізнаємося дією множення, скільки десятків розділилося, — 60 десятків розділилося. Дізнаємося дією віднімання, скільки десятків не розділилося, — 18 десятків не розділилося. Перевіряємо, чи правильно знайдено цифру значення частки. Для цього остачу 18 порівнюємо з дільником: 18 менше від 30, тому цифру значення частки знайдено правильно. Утворюємо третє неповне ділене: 18 десятків $=180$ одиниць. Ділимо 180 одиниць на 30. $180:10=18$; $18:3=6$. Дізнаємося, скільки одиниць розділилося, дією множення. Дізнаємося, скільки одиниць не розділилося, дією віднімання, — усі одиниці розділилися. Ділення закінчено.

Аналогічно виконується ділення на круглі сотні.

Письмове ділення багатоцифрового числа на двоцифрове число

Міркування здійснюється за відомою пам'яткою ділення на двоцифрове число.

$$
\begin{array}{r|l}
-31595 & 71 \\
\underline{284} & \overline{4\dot{4}\dot{5}} \\
-319 & \\
\underline{284} & \\
-355 & \\
\underline{355} & \\
0 &
\end{array}
\quad \longrightarrow 70 = 10 \cdot 7
$$

$315:10 \approx 31$,	$319:10 \approx 31$,	$355:10 \approx 35$,
$31:7 \approx 4$,	$31:7 \approx 4$,	$35:7 \approx 5$,
4 — ?	4 — ?	5 — ?
$4 \cdot 70 = 280$,	$4 \cdot 70 = 280$,	$5 \cdot 70 = 350$,
$315 - 280 = 35$,	$315 - 280 = 35$,	$355 - 250 = 5$,
$35 > 4 \cdot 1$,	$35 > 4 \cdot 1$,	$5 = 5 \cdot 1$,
отже, пробна цифра 4 підходить	отже, пробна цифра 4 підходить	отже, пробна цифра 5 підходить

Міркуємо так. У дільнику дві цифри, тому в діленому відділяємо ліворуч дві цифри: 31 тисяча. 31 тисячу не можна поділити на 71 так, щоб одержати хоча б одну тисячу. Тому переходимо до наступного розряду. 315 сотень — перше неповне ділене. Оскільки перше неповне ділене — сотні, то в значенні частки в найвищому розряді теж будуть сотні, тобто три цифри.

Ділимо перше неповне ділене на дільник: $315:71$. Для цього дільник замінюємо найближчим меншим круглим числом 70. Подаємо кругле число у вигляді добутку 10 і числа. Ділимо послідовно. $315:10\approx 31$; $31:7\approx 4$. 4 — це пробна цифра, її слід перевірити: 4 множимо на десятки дільника: $4\cdot 70=280$; віднімаємо одержане число від неповного діленого: $315-280=35$; порівнюємо остачу з добутком «пробної цифри» значення частки на одиниці дільника: $35>4\cdot 1$, остача більша, тому пробна цифра підходить, пишемо її на місці сотень у значенні частки.

Дізнаємося, скільки сотень розділилося, дією множення, — 284 сотні розділилося.

Дізнаємося, скільки сотень не розділилося, дією віднімання, — 31 сотня не розділилася.

Перевіряємо остачу: остача 31 менша від дільника 71, тому цифру значення частки підібрано правильно.

Утворюємо друге неповне ділене з остачі десятків дільника: 319 десятків — друге неповне ділене. Ділимо його на 71. Для цього дільник 71 замінюємо найближчим меншим круглим числом 70. Подаємо його у вигляді добутку числа і розрядної одиниці. Ділимо послідовно. $319:10\approx 31$; $31:7\approx 4$. 4 — це пробна цифра, її слід перевірити: 4 множимо на десятки дільника: $4\cdot 70=280$; віднімаємо одержане число від неповного діленого: $319-280=39$; порівнюємо остачу з добутком «пробної цифри» значення частки на одиниці дільника: $39 > 4\cdot 1$; остача більша, тому пробна цифра підходить, пишемо її на місці десятків у значенні частки.

Дізнаємося, скільки десятків розділилося, дією множення, — 284 десятки розділилося.

Дізнаємося, скільки десятків не розділилося, дією віднімання, — 35 десятків не розділилося.

Перевіряємо остачу: остача 35 менша від дільника 71; тому цифру значення частки підібрано правильно.

Утворюємо третє неповне ділене з остачі та одиниць дільника: 355 одиниць — третє неповне ділене.

Ділимо його на 71. Для цього дільник 71 замінюємо найближчим меншим круглим числом 70. Подаємо його у вигляді добутку числа і розрядної одиниці. Ділимо послідовно. $355:10\approx 35$; $35:7\approx 5$. 5 — це пробна цифра, її слід перевірити: 5 множимо на десятки дільника: $5\cdot 70=350$; віднімаємо одержане число від неповного діленого: $355-350=5$; порівнюємо остачу з добутком «пробної цифри» значення частки на одиниці дільника: $5=5\cdot 1$; остача дорівнює добутку, тому пробна цифра підходить, пишемо її на місці одиниць у значенні частки.

Дізнаємося, скільки одиниць розділилося, дією множення, — 355 одиниць розділилися.

Дізнаємося, скільки одиниць не розділилося, дією віднімання, — усі одиниці розділилися, ділення закінчено.

Далі вивчаються випадки **письмового ділення п'яти- та шестицифрового чисел, які закінчуються нулями, на двоцифрове число**. Учні вже знайомі з випадками ділення круглого числа на одноцифрове і вміють пояснювати, чому на місці одиниць потрібно записати нуль. Ці знання слід актуалізувати на етапі підготовчої роботи і перенести в нову навчальну ситуацію. Отже, учні можуть самостійно виконати ділення поданих чисел і пояснити, чому саме на місці одиниць буде нуль.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,334500 & 75 \\ \cline{2-2}
\underline{300} & 4460 \\
-\,345 & \\
\underline{300} & \\
-\,450 & \\
\underline{450} & \\
0 &
\end{array}
$$

Перше неповне ділене 334 тисячі, тому в значенні частки в найвищому розряді будуть тисячі, а отже, чотири цифри.

Ділимо 334 на 75. Для цього дільник 75 замінюємо меншим круглим числом 70. Подаємо його у вигляді добутку числа і розрядної одиниці. Ділимо послідовно. $334:10\approx 33$; $33:7\approx 4$ — це пробна цифра значення частки, її слід перевірити: $4\cdot 70=280$, $334-280=54$, $54>4\cdot 5$ — цифра 4 підходить, пишемо її в значенні частки на місці тисяч.

300 тисяч розділилося, 34 тисячі не розділилися. Остача 34 менша від дільника, тому цифру значення частки знайдено правильно.

З остачі 34 тисячі та 5 сотень діленого утворюємо друге неповне ділене — 345 сотень. Працюємо за тим самим алгоритмом. $345:10\approx 34$, $34:7\approx 4$. Перевіряємо пробну цифру значення частки: $4\cdot 70=280$, $345-280=65$, $65>4\cdot 5$ — цифра 4 підходить, пишемо її на місці сотень у значенні частки.

300 сотень розділилося, 45 сотень не розділилося, остача 45 менша від дільника, тому цифру значення частки знайдено правильно.

45 сотень — це 450 десятків, у діленому 0 десятків, тому третє неповне ділене 450 десятків. Працюємо за вже відомим алгоритмом. $450:10\approx 45$, $45:7\approx 6$. Перевіряємо пробну цифру значення частки: $6\cdot 70=420$, $450-420=30$, $30=6\cdot 5$; цифра 6 підходить, пишемо її у розряді десятків у значенні частки.

450 десятків розділилися. Усі десятки розділилися, тому в частці ми отримали 446 десятків — це 4460 одиниць.

Або міркувати можна ще й так: четверте неповне ділене 0 одиниць. $0:75=0$ — пишемо нуль на місці одиниць у значенні частки. Ділення закінчено.

Наступний випадок **письмового ділення багатоцифрового числа на двоцифрове число, коли в середині запису частки є нуль.** Знову потрібно звернутися до аналогічних випадків ділення на одноцифрове число і перенести відомий дітям спосіб міркування в нову навчальну ситуацію.

$$\begin{array}{r|l} -45066 & 74 \\ \cline{2-2} \underline{444} & 609 \\ -66 & \\ \underline{0} & \\ -666 & \\ \underline{666} & \\ 0 & \end{array}$$

Перше неповне ділене 450 сотень, тому найвищий розряд значення частки — сотні, тобто три цифри.

Ділимо 450 на 74 за відомим алгоритмом. $450:10\approx45$, $45:7\approx6$. 6 — це пробна цифра значення частки, її слід перевірити: $6\cdot70=420$, $450-420=30$, $30>6\cdot4$, цифра 6 підходить, пишемо її у значенні частки на місці сотень.

Розділилося 444 сотні. Не розділилося 6 сотень.

Перевіряємо: остача 6 менша від дільника 74, тому цифру значення частки знайдено правильно.

З остачі та десятків дільника утворюємо друге неповне ділене — 66 десятків. 66 десятків не можна поділити на 74 так, щоб одержати хоча б один десяток, тому на місці десятків у значенні частки пишемо цифру 0. Або $66:74=0$ (ост. 66). 0 десятків розділилося. 66 десятків не розділилося.

Утворюємо третє неповне ділене з остачі та одиниць діленого — 666 одиниць. Ділимо 666 на 74 за вже знайомим алгоритмом. $666:10\approx66$, $66:7\approx9$. Перевіряємо пробну цифру значення частки: $9\cdot70=630$, $666-630=36$, $36=9\cdot4$, — цифра 9 підходить, пишемо її на місці одиниць у значенні частки. Розділилися усі одиниці. Ділення закінчено.

$$\begin{array}{r|l} -17640 & 35 \\ \cline{2-2} \underline{175} & 504 \\ -140 & \\ \underline{140} & \\ 0 & \end{array}$$

Розглядаючи короткий запис таких випадків письмового ділення, потрібно звернути увагу на те, що при множенні дільника 35 на нуль завжди одержимо нуль, а при відніманні нуля від неповного діленого 14 десятків буде те саме число — 14 десятків; тому тут нуль не пишуть, але запам'ятовують, що друге неповне ділене 14 десятків, а третє неповне ділене — 140 одиниць.

У порядку ознайомлення показуємо учням **письмове ділення багатоцифрового числа на трицифрове число.**

$$\begin{array}{r|l} -25272 & 324 \\ \underline{2268} & \overline{78} \\ -2592 & \\ \underline{2592} & \\ 0 & \end{array}$$

У дільнику 3 цифри, тому в діленому відділяємо зліва також 3 цифри, маємо 252 сотні. 252 сотні не можна поділити на 324 так, щоб одержати хоча б одну сотню, тому переходимо до наступного розряду: 2527 десятків — перше неповне ділене. У частці одержимо десятки, буде дві цифри.

Використовуємо спосіб прикидки. $2527:100\approx25$, $25:3\approx8$. Перевіряємо пробну цифру значення частки: $8\cdot300=2400$, $2527-2400=127$, $127<8\cdot24$, тому цифра 8 не підходить; візьмемо по 7: $7\cdot300=2100$, $2527-2100=427$, $427>7\cdot24$, тому цифра 7 підходить, пишемо її на місці десятків у значенні частки.

2268 десятків розділилося. 259 десятків не розділилися. Остача 259 менша від дільника 324, тому цифру значення частки знайдено правильно.

З остачі і одиниць діленого утворюємо друге неповне ділене — 2592 одиниці. Прикидаємо пробну цифру значення частки: $2592:100\approx25$, $25:3\approx8$. Перевіряємо: $8\cdot300=2400$, $2592-2400=192$, $192=8\cdot24$ — пишемо цифру 8 на місці одиниць у значенні частки.

2592 одиниці розділилися. Усі одиниці розділилися, ділення закінчено.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДРОБІВ

3.1. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ УЯВЛЕННЯ ПРО ДРІБ ІЗ ЧИСЕЛЬНИКОМ 1 У 3 КЛАСІ

Потреба в більш точних вимірюваннях величин стала причиною того, що одиниці вимірювання почали ділити на кілька рівних частин: 2, 4, 8 і т. д. Кожна така частина мала свою назву. Наприклад, у Київській Русі половину називали «полтина», четверту частину називали «четь», восьму частину — «півчеть», шістнадцяту — «півпівчеть» і т. д. Рівні частини цілої мірки називали долями (частинами): четверта доля, восьма, шістнадцята тощо.

Згідно з програмою початкового курсу математики основними завданнями при вивченні частин величини є:

1) сформувати в учнів уявлення про частини величини;
2) навчити порівнювали частини на наочній основі;
3) навчити розв'язувати задачі на знаходження частини від числа і числа за величиною його частини.

Тема вивчається на практичній основі із застосуванням великої кількості наочності — математичних матеріалів: смужок паперу, набору геометричних фігур (прямокутників, кругів, рівносторонніх трикутників, шестикутників, восьмикутників), також можна використати яблуко, торт і т. п. для ділення на рівні частини.

3.1.1. Одержання дробу — однієї з кількох рівних частин цілого

Розглянемо методику одержання частин цілого.

Звертаючись до попереднього досвіду дітей, учитель приносить на урок яблуко, розрізає його на дві рівні частини і показує одну таку частину. Після цього вчитель запитує, як можна назвати цю частину яблука [половина яблука]; чому ми так назвали цю частину [тому що яблуко розділили навпіл]. Далі вчитель запитує, як одержати половину яблука. [Щоб одержати половину яблука, потрібно ціле яблуко розділити на дві рівні частини і взяти лише одну таку частину.] Учитель показує іншу частину яблука і запитує, що це. [Половина яблука.] Далі вчитель просить довести це твердження. [Яблуко розділили на дві рівні частини. Кожна така частина є половиною. Отже, перша частина — половина яблука і друга частина — також половина яблука.]

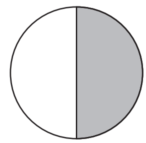
Після цього учитель запитує, скільки половин у цілому яблуці. [У цілому дві половини!]

Далі вчитель пропонує учням взяти смужку паперу, розділити її на дві рівні частини і зафарбувати одну таку частину.

Після виконаної роботи учитель запитує, що учні зафарбували [половину смужки]; що таке половина [половина — це одна з двох рівних частин цілого].

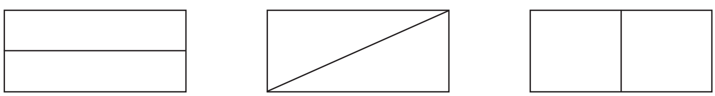
Після зробленого висновку пропонуємо учням виконати практичне завдання: зафарбувати половину круга.

Учні перегинають круг навпіл так, щоб його краї збіглися; розгладжують лінію згину; розгортають круг і бачать, що лінією згину цілий круг розділено на дві рівні частини. Після цього учні зафарбовують одну з таких частин.



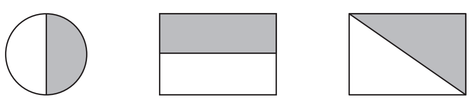
Після виконання практичного завдання запитуємо в учнів, як одержати половину.

Далі просимо розділити прямокутник навпіл і зафарбувати його половину. Запитуємо, скільки таких половин у цілому; як можна інакше розділити прямокутник навпіл. Просимо продемонструвати різні варіанти.



Отже, якщо ціле розділили на дві рівні частини, то кожна така частина є половиною.

Половина — одна з двох рівних частин цілого.



Щоб одержати половину, потрібно ціле розділити на дві рівні частини і взяти одну таку частину.

Половина: $\frac{1}{2}$ → ціле розділили на 2 рівні частини й узяли 1 таку частину.

Ціле містить дві половини.

Половина (одна друга) — це дробове число, воно записується так: $\frac{1}{2}$.

Запитуємо учнів, як ми отримали $\frac{1}{2}$. [Ми одне ціле розділили на дві рівні частини.] Отже, $1:2=\frac{1}{2}$.

У записі $\frac{1}{2}$ під рискою записано число 2. Запитуємо, що позначає число 2. [Число 2 позначає, на скільки рівних частин розділили ціле.]

Запитуємо, яке число записано над рискою [число 1]; що воно позначає [число 1 над рискою позначає, скільки таких частин узяли].

Повідомляємо, що число під рискою називається знаменник. Запитуємо, що показує знаменник. [Знаменник показує, на скільки рівних частин розділили ціле.]

Повідомляємо, що число над рискою називається чисельник. Запитуємо, що показує чисельник. [Чисельник показує, скільки таких частин узяли.]

Отже, частини записуються парою цифр. Кажуть: цифра над рискою (чисельник) та цифра під рискою (знаменник).

a →	Чисельник →	Скільки таких частин узяли
b →	Знаменник →	На скільки рівних частин розділили ціле

Риска — це ще одна позначка арифметичної дії ділення. У математиці арифметична дія ділення має два знаки — «:», «риска дробу».

Аналогічно вводиться уявлення про третину, чверть, п'яту, шосту, восьму... частини. Детальніше про методику введення цих понять див. за посиланням.

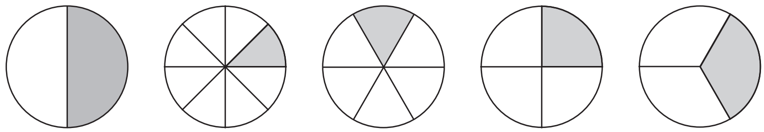
Запис $\frac{1}{n}$ означає, що ціле розділили на n рівних частин і взяли 1 таку частину.

Закріплення поняття про частини відбувається під час виконання завдань такого типу.

1. Диню розділили порівну між 5 дітьми. Яку частину дині отримала кожна дитина?

2. Яку частину відрізка AB становить відрізок CD?

3. Яка частина круга зафарбована в кожному випадку?



4. Прочитайте записи: $\frac{1}{7}$ торта; $\frac{1}{4}$ яблука; $\frac{1}{9}$ гарбуза; $\frac{1}{12}$ дороги; $\frac{1}{10}$ дециметра; $\frac{1}{6}$ години; $\frac{1}{100}$ кілограма. Що вони означають?

5. Розв'яжіть задачу.

Одне ціле — одиницю — розділили на 7, 13, 17, 24, 99 рівних частин. Як назвати одну з таких частин у кожному випадку? Запишіть одержані дроби.

6. Розв'яжіть задачу.

Кавун важить 8 кг. Скільки кілограмів важить його половина?

Під час розв'язування подібних задач учні повинні міркувати так: щоб одержати половину, потрібно ціле розділити на дві рівні частини. Отже, масу цілого кавуна, 8 кг, потрібно поділити на 2 — $8:2=4$ (кг). Половина кавуна важить 4 кг.

7. Розв'яжіть задачу.

П'ята частина учнів класу відмінники. Відмінників 7 учнів. Скільки всього учнів у класі?

Під час розв'язування цієї задачі учні міркують так: у цілому 5 п'ятих частин, тому по 7 учнів потрібно взяти 5 разів. $7\cdot 5=35$ (учн.). *Відповідь:* 35 учнів у класі.

Слід зазначити, що завдання 6 та 7 можна розглядати як підготовку до введення правил знаходження частини від числа та числа за величиною його частини. З цією метою корисно запропонувати учням відповісти на такі запитання.

У скільки разів $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{71}$, ...) менше від цілого?

У скільки разів ціле більше за $\frac{1}{5}$ ($\frac{1}{11}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{42}$, ...)?

Яку частину метра становить 1 дм? 1 см?

Яку частину години становить 1 хв? 1 с?

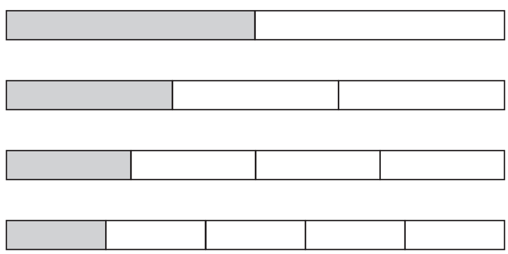
Міркуємо так. В 1 м 10 дм, тому 1 така частина — це $\frac{1}{10}$, отже 1 дм — це $\frac{1}{10}$ м.

3.1.2. Методика навчання порівняння дробів із чисельником 1

Учні порівнюють частини двома способами, спираючись на наочність:

1) виконують практичні дії з наочністю: одержують задані частини на однакових геометричних фігурах, накладають їх одна на одну і роблять висновок;
2) розглядають рисунки, на яких на однакових геометричних фігурах зафарбовано певні частини, на підставі чого роблять висновок.

1. Порівняйте частини за рисунками.



Пропонуємо учням розглянути смужки і визначити, що в них спільне.

Запитуємо, на скільки рівних частин розділено першу смужку; яку частину смужки зафарбовано; скільки половин у цілому.

Запитуємо, на скільки рівних частин поділено другу смужку; яку частину смужки зафарбовано; скільки третин у цілому.

Запитуємо, на скільки рівних частин поділено третю смужку; яку частину смужки зафарбовано; скільки чвертей у цілому.

Запитуємо, на скільки рівних частин поділено четверту смужку; яку частину смужки зафарбовано; скільки п'ятих частин у цілому.

Пропонуємо учням порівняти $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{3}$. Запитуємо, чому половина більша за третину. [Тому що цілу смужку у першому випадку поділили лише на дві рівні частини, а у другому — на три рівні частини. Від цього величина однієї частини зменшилася.]

Пропонуємо учням порівняти $\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{4}$. Запитуємо, яка частина більша; чому.

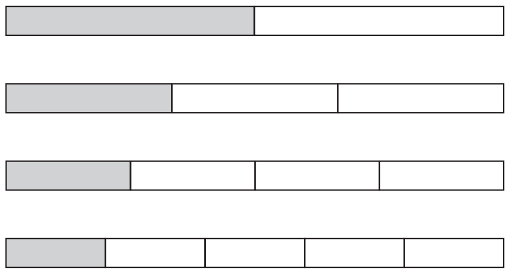
Пропонуємо учням порівняти $\frac{1}{4}$ та $\frac{1}{5}$. Запитуємо, яка частина більша; чому.

$\frac{1}{2}$ — одна друга

$\frac{1}{3}$ — одна третя

$\frac{1}{4}$ — одна четверта

$\frac{1}{5}$ — одна п’ята



$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{4} > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

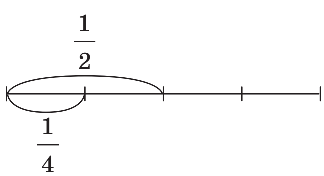
Колективно формулюємо висновок.

> Чим на більше число рівних частин розділили ціле, тим менша величина однієї такої частини.

2. Запишіть частини в порядку зростання:

$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{34}, \frac{1}{5}$.

3. Порівняйте половину та чверть. Що більше?



Алгоритм виконання завдання:

1) відрізок ділимо спочатку на дві рівні частини і показуємо половину;
2) потім відрізок ділимо на чотири рівні частини і показуємо чверть;
3) робимо висновок.

3.1.3. Методика навчання знаходження частини від цілого

Правило знаходження частини від цілого може бути введено двома способами:

1) на підставі розв'язання простої задачі на конкретний зміст ділення на рівні частини;
2) на підставі індуктивного узагальнення результатів вимірювання.

Розглянемо обидві методики.

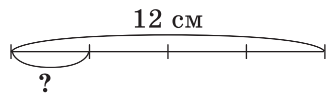
І варіант методики

Пропонуємо учням розв'язати задачу.

1. Розв'яжіть задачу.

Відрізок завдовжки 12 см розділили на 4 рівні частини. Як називається одна така частина? Знайдіть довжину четвертої частини відрізка.

Доцільно розв'язання задачі проілюструвати кресленням.



Запитуємо в учнів, як одержати чверть. [Щоб одержати чверть, потрібно ціле розділити на 4 рівні частини.] Звідси випливає розв'язок. $12:4=3$ (см).

Можна міркувати інакше.

Запитуємо в учнів, скільки четвертих частин у цілому [4]; у скільки разів довжина чверті менша, ніж довжина цілого відрізка [у 4 рази]; якою арифметичною дією знаходимо число, яке в кілька разів менше за дане [діленням].

Розв'язання: $12:4=3$ (см).

Відповідь: 3 см — довжина четвертої частини відрізка.

Просимо учнів пояснити, що позначає число 12 [довжину цілого відрізка]; число 4 [кількість рівних частин у цілому]; число 3 [довжину четвертої частини відрізка].

Запитуємо, якою арифметичною дією ми дізналися про величину частини від цілого [діленням]; як знайти величину частини від цілого [для цього потрібно величину цілого поділити на кількість рівних частин у ньому]. Робимо узагальнювальний висновок.

> **!** Щоб знайти частину від цілого, потрібно величину цілого поділити на кількість рівних частин у ньому.

ІІ варіант методики

Практична робота.

Роздаємо учням по три смужки паперу завдовжки 24 см. Запитуємо, якої довжини буде $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ цієї смужки.

Учні ділять смужки на вказану кількість рівних частин і вимірюють лінійкою довжину одержаних частин. Дані заносять у таблицю.

Довжина цілої смужки (см)	На скільки рівних частин розділили цілу смужку	Довжина однієї частини (см)
24	2	12
24	4	6
24	8	3

Учні вивчають дані таблиці і визначають, якою арифметичною дією можна дізнатися про величину частини від цілого, а потім роблять перевірку своєї гіпотези і формулюють правило.

З метою закріплення правила пропонуємо учням завдання на знаходження частини від числа.

2. Знайдіть:

1) $\frac{1}{7}$ від 49;

3) $\frac{1}{10}$ від 100 см;

2) $\frac{1}{4}$ від 20;

4) $\frac{1}{5}$ від 15 хв.

Після того як учні навчилися знаходити частину від цілого, пропонуємо їм розв'язати сюжетну задачу.

3. Розв'яжіть задачу.

У магазин привезли 56 кг огірків. До обіду продали $\frac{1}{8}$ усіх огірків. Скільки кілограмів огірків продали до обіду?

Просимо учнів пояснити, що позначає число 56 [масу всіх огірків, що привезли]; число $\frac{1}{8}$ [яку частину огірків продали до обіду]; що позначає знаменник 8 [що всі 56 кг огірків розділили на 8 рівних частин]; чисельник 1 [що 1 таку частину продали до обіду].

1 — 56 кг

$\frac{1}{8}$ — ?

Запитуємо, що в задачі позначає ціле. [56 кг огірків.] Ціле в математиці позначається як 1. Запишемо це.

Запитуємо, що потрібно знайти в цій задачі [$\frac{1}{8}$ від 56 кг]; як знайти частину від числа [щоб знайти частину від числа, потрібно величину цілого поділити на кількість рівних частин у ньому].

Розв'язання: $56:8=7$ (кг).

Відповідь: 7 кг огірків продали до обіду.

Далі розв'язуються складені задачі, які містять знаходження частини від числа.

3.1.4. Методика навчання знаходження цілого за величиною його частини

Правило знаходження цілого за величиною його частини може бути введено двома способами:

1) на підставі розв'язування простої задачі на конкретний зміст дії множення;
2) на підставі індуктивного узагальнення результатів вимірювання.

Розглянемо обидві методики.

I варіант методики

Пропонуємо учням розв'язати задачу.

1. Розв'яжіть задачу.

Довжина чверті відрізка становить 3 см. Визначте довжину цілого відрізка.

Запитуємо в учнів, скільки четвертих частин у цілому [4]; яка довжина чверті відрізка [3 см]. Якщо в цілому відрізку 4 таких частини по 3 см, то потрібно по 3 см взяти 4 рази.

Запитуємо, що більше: ціле чи його частина; у скільки разів; якою арифметичною дією дізнаємося про число, яке в 4 рази більше за 3 см. [Дією множення.]

Розв'язання: $3\cdot 4=12$ (см).

Відповідь: 12 см — довжина цілого відрізка.

Просимо учнів пояснити, що позначає число 3 [довжину однієї частини відрізка]; число 4 [кількість частин у цілому]; число 12 [величину цілого]. Запитуємо, якою арифметичною дією ми дізналися про величину цілого [множенням]; як знайти величину цілого за величиною його частини [для цього потрібно величину частини помножити на кількість рівних частин у цілому]. Робимо узагальнювальний висновок.

> Щоб знайти ціле за величиною його частини, потрібно величину частини помножити на кількість частин у цілому.

ІІ варіант методики

Практична робота.

Роздаємо учням по 5 смужок паперу завдовжки 2 см. Повідомляємо, що одна така частина — це половина цілого, і пропонуємо відтворити ціле.

Ураховуючи те, що в цілому дві такі половини, учні викладають дві такі смужки-частини в рядок і визначають величину одержаного цілого.

Пізніше пропонуємо вважати, що одна така смужка — це третина (чверть, п'ята частина). Учні відновлюють ціле і дізнаються про його величину. Дані заносять у таблицю.

Довжина цілої смужки (см)	На скільки рівних частин розділили цілу смужку	Довжина однієї частини (см)
4	2	2
6	3	2
8	4	2
10	5	2

Школярі вивчають дані таблиці і визначають, якою арифметичною дією можна дізнатися про величину цілого за величиною його частини. Потім роблять перевірку своєї гіпотези і формулюють правило.

З метою закріплення правила пропонуємо учням завдання на знаходження цілого числа за величиною його частини.

2. Знайдіть:

1) число, якщо його $\frac{1}{6}$ становить 8;

2) число, якщо його $\frac{1}{9}$ становить 5;

3) масу цілого, якщо його $\frac{1}{4}$ становить 7 кг.

Після того як учні навчилися знаходити ціле за величиною його частини, пропонуємо їм розв'язати сюжетну задачу.

3. Розв'яжіть задачу.

Дівчинка прочитала 12 сторінок, що становить $\frac{1}{5}$ книги. Скільки сторінок містить ціла книга?

1 — ?
$\frac{1}{5}$ — 12 с.

Просимо учнів пояснити, що позначає число 12 [скільки сторінок прочитала дівчинка]; що ще позначає число 12 [величину $\frac{1}{5}$ книги]; що позначає число $\frac{1}{5}$ [яку частину книги прочитала дівчинка]; що позначає знаменник 5 [на скільки рівних частин розділили цілу книгу]; чисельник 1 [скільки таких частин прочитала дівчинка].

Запитуємо, що потрібно знайти в цій задачі [величину цілої книги]; як у математиці позначається ціле [1]; як знайти число за величиною його частини.

Розв'язання: $12 \cdot 5 = 60$ (с.)

Відповідь: 60 сторінок у книзі.

Далі розв'язуються складені задачі, які містять знаходження числа за величиною його частини.

3.2. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ УЯВЛЕННЯ ПРО ДРОБИ В 4 КЛАСІ

Очікувані результати навчання здобувачів освіти див. за посиланням.

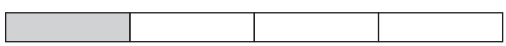
3.2.1. Одержання дробу — однієї з кількох рівних частин цілого

Утворення дробів демонструють за допомогою наочності. Ознайомленню з новим поняттям передує підготовча робота, під час якої актуалізуються:

1) утворення частин; демонстрація $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ і т. д.;
2) значення числа під рискою (знаменника) і над рискою (чисельника);
3) кількість рівних частин у цілому.

На етапі ознайомлення можна здійснити утворення дробу під час виконання практичної роботи.

Роздаємо кожному учневі по смужці паперу і пропонуємо зафарбувати її четверту частину.



Запитуємо в учнів, скільки четвертих частин у цілому [4] і просимо зафарбувати ще одну четверту частину.

Після цього запитуємо, скільки всього четвертих частин зафарбували учні. [Дві четвертих.]

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{2}{4}$ — по $\frac{1}{4}$ взяти 2 рази; читаємо так: «дві четвертих».

Потім пропонуємо учням зафарбувати три четвертих частини.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$ — по $\frac{1}{4}$ взяти 3 рази; читаємо так: «три четвертих».

Такі числа є дробами. **Дріб** — це одна або кілька рівних частин цілого. Дроби записують двома натуральними числами, які розділені рискою. Число над рискою називають **чисельником**, а число під рискою називають **знаменником**. Знаменник показує, на скільки рівних частин розділили ціле, а чисельник — скільки таких частин узяли.

a →	Чисельник →	Скільки таких частин узяли
b →	Знаменник →	На скільки рівних частин розділили ціле

Варто зауважити, що при читанні дробів слід пам'ятати, що чисельник дробу — кількісний числівник жіночого роду (одна, дві, три й т. д.), а знаменник — порядковий числівник (дев'ята, сота, тридцята тощо):

$\frac{5}{6}$ — п'ять шостих; $\frac{7}{11}$ — сім одинадцятих; $\frac{17}{35}$ — сімнадцять тридцять п'ятих.

Завдання на ділення цілого на рівні частини та виділення кількох із них, метою яких є формування поняття про дріб, див. за посиланням.

Пропонуємо учням завдання на читання дробів.

1. Прочитайте дроби. Назвіть чисельник і знаменник кожного дробу і поясніть, що вони означають: $\frac{2}{9}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{41}{100}$.

Пропонуємо учням завдання на запис дробів.

2. Запишіть цифрами дроби: п'ять восьмих; шість дев'ятих; тридцять три сотих; тринадцять двадцять восьмих.
3. Ціле розділили на 100 рівних частин. Як називаються 7, 9, 14, 16, 23, 42, 88 таких частин? Запишіть відповідні дроби.
4. Розв'яжіть задачу.

9 яблук поділили порівну між 12 дітьми. Яку частину яблука отримала кожна дитина?

Просимо учнів постаратися знайти різні способи розв'язування; подумати, чи можна розв'язати задачу, якщо жодне яблуко не можна ділити більше ніж на 4 рівні частини. [6 яблук потрібно розділити навпіл і дати кожній дитині по половині яблука; а решту — 3 яблука — розділити на 4 рівні частини і дати кожній дитині по чверті яблука, отже, кожен із 12 дітей отримує по половині і ще по чверті яблука.]

Якщо учням важко знайти такий розв'язок, то вчитель пропонує яблука замінити кругами і ділити круги на рівні частини.

Далі частини пов'язуємо з одиницями вимірювання величин шляхом виконання завдань.

5. Яку частину метра становить 1 дм?

Розв'язання. У цілому метрі 10 дециметрів, тому цілий метр розділено на 10 рівних частин — дециметрів. Отже, одна така частина — дециметр — становить десяту частину метра.

6. Подайте в метрах 1 дм; 6 дм; 8 дм.

7. Яку частину години становить 1 хв? Подайте в годинах 1 хв; 5 хв; 17 хв; 27 хв.

8. Яку частину року становить 1 місяць? 3 місяці? 7 місяців? 9 місяців? 12 місяців? Запишіть відповідні дроби.

Наступним кроком є формування уявлення про дроби, які дорівнюють 1. Логічно ознайомити учнів із дробами, які менші від 1, та дробами, які більші за 1. Докладніше див. за посиланням.

3.2.2. Методика навчання порівняння дробів із рівними знаменниками

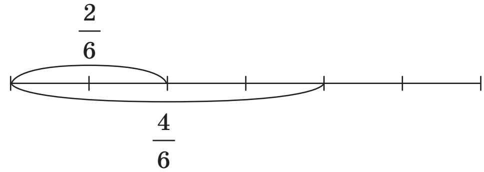
Навчання порівняння дробів із рівними знаменниками відбувається на практичній основі з використанням смужок паперу, кругів, прямокутників.

Спочатку порівнюємо дроби способом накладання відповідних частин смужок паперу.

1. Візьміть дві однакові смужки паперу. На першій смужці покажіть $\frac{3}{4}$, а на другій — $\frac{2}{6}$. Способом накладання відповідних частин порівняйте дроби $\frac{3}{4}$ та $\frac{2}{6}$.

У наступному завданні можна зобразити дроби як частини цілого відрізка, зафарбувати їх різними кольорами і на основі цього робити висновок.

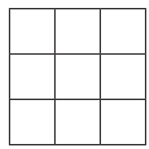
2. Накресліть відрізок завдовжки 6 см. Позначте на ньому $\frac{2}{6}$ та $\frac{4}{6}$. Порівняйте відповідні дроби.



$\boxed{\frac{2}{6} < \frac{4}{6}}$

Після практичного виконання цього завдання запитуємо в учнів, що спільне в цих дробах [у них однакові знаменники.] Просимо пояснити, що позначає знаменник дробу. Запитуємо, чим відрізняються ці дроби [чисельниками]; що позначає чисельник першого дробу; що позначає чисельник другого дробу; чому $\frac{2}{6} < \frac{4}{6}$ [кожний відрізок розділили на 6 рівних частин; спочатку взяли 2 такі частини, а потім 4 такі частини; 2 частини менше, ніж 4 частини, тому $\frac{2}{6} < \frac{4}{6}$].

Отже, дроби з однаковими знаменниками можна порівнювати без наочності, міркуванням: кожну величину розділили на однакову кількість частин. Спочатку взяли ..., потім взяли ...; ... такі частини $\frac{\text{більше}}{\text{менше}}$, ніж ... такі частини, тому дріб ... $\frac{\text{менший}}{\text{більший}}$ ніж дріб ... .



3. Розгляньте малюнок. Скільки на ньому рівних квадратів? Яку частину великого квадрата складає один маленький? Запишіть відповідь дробом.

Які ще дроби можна записати, використовуючи цей малюнок? Запишіть ці дроби. Для кожного записаного дробу зробіть такий самий малюнок і зафарбуйте на ньому ту частину великого квадрата, яка дорівнює цьому дробу. На якому малюнку площа зафарбованої частини найменша? найбільша? Розташуйте записані дроби в порядку зростання площин, що їм відповідають. Порівняйте дроби. Що в них не змінюється? що змінюється? Як змінюються чисельники? Як змінюються дроби? Який висновок можна зробити?

Після цього просимо учнів записати кілька дробів з однаковими знаменниками і розташувати їх у порядку спадання. Запитуємо, як змінюються чисельники; як змінюються величини дробів. Який висновок можна зробити? Формулюємо загальний висновок.

З двох дробів з однаковими знаменниками $\frac{\text{більший}}{\text{менший}}$ той, у якого чисельник $\frac{\text{більший}}{\text{менший}}$.

4. Запишіть дроби, у яких: чисельник 2, знаменник 5; чисельник 4, знаменник 6; чисельник 4, знаменник 10; чисельник 1, знаменник 7.

Запитуємо, чи можна порівняти ці дроби, користуючись зробленим висновком. Просимо пояснити відповідь.

До кожного дробу пропонуємо записати кілька дробів, із якими зручно порівнювати цей дріб. Просимо розташувати кожну групу дробів у порядку зростання.

Також можна актуалізувати порівняння дробів із чисельником 1, яке на практичній основі розглядалося в 3 класі, та з пропедевтичною метою ознайомити учнів із порівнянням дробів з однаковими знаменниками, що буде предметом вивчення в 5 класі. Детальніше див. за посиланням.

З огляду на пізнавальні можливості і потреби учнів класу можна пропонувати завдання підвищеної складності. Детальніше див. за посиланням.

У 5 класі при вивченні звичайних дробів буде розглядатися основна властивість дробу: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме число, то дріб не зміниться. У початковій школі можна підготувати учнів до розуміння цієї властивості шляхом виконання системи навчальних завдань. Детальніше див. за посиланням.

3.2.3. Методика навчання знаходження дробу від числа

На етапі підготовчої роботи варто розглянути систему навчальних завдань, направлених на формування уявлення про знаходження дробу від числа та вміння знаходити дріб від числа.

1. Зобразіть ціле (фігуру). Зафарбуйте: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}$ цілого.

2. Зобразіть ціле у вигляді:

1) 12 однакових об'єктів; зафарбуйте: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$ цілого;

2) 9 однакових об'єктів; зафарбуйте: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$ цілого.

3. Накресліть смужку завдовжки 16 клітинок.

1) Першу чверть смужки зафарбуйте червоним олівцем, другу — синім, третю — жовтим. Скільки всього клітинок зафарбовано? Яка частина всієї смужки зафарбована?

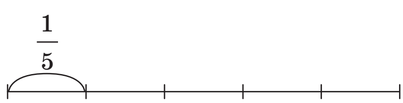
2) Зафарбуйте $\frac{3}{4}$ смужки синім олівцем. У скільки разів більше синіх клітинок, ніж білих (незафарбованих)?

На етапі ознайомлення правило знаходження дробу від числа вводиться на прикладі задачі. Під час розв'язування задачі доцільно кожний крок ілюструвати на кресленні.

4. Розв'яжіть задачу.

Дано відрізок завдовжки 10 см. Скільки сантиметрів становить $\frac{3}{5}$ цього відрізка?

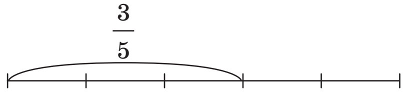
Розглянемо методику розв'язування цієї задачі. Накресліть відрізок завдовжки 10 см. Яку частину на ньому потрібно позначити? [$\frac{3}{5}$] Що позначає знаменник? [Знаменник позначає, що цілий відрізок потрібно розділити на 5 рівних частин.] Виконайте цю дію.



Якою арифметичною дією можна дізнатися, скільки сантиметрів містить одна частина? Виконайте цю дію.

1) $10:5=2$ (см) — довжина однієї частини.

Що більше: $\frac{3}{5}$ чи $\frac{1}{5}$? У скільки разів $\frac{3}{5}$ більше за $\frac{1}{5}$? [$\frac{3}{5}$ у 3 рази більше, ніж $\frac{1}{5}$.]



У скільки разів більше сантиметрів містить $\frac{3}{5}$ ніж $\frac{1}{5}$? [У 3 рази.] Якою арифметичною дією можна дізнатися про довжину $\frac{3}{5}$ відрізка?

2) $2 \cdot 3 = 6$ (см) — довжина $\frac{3}{5}$ відрізка.

Відповідь: $\frac{3}{5}$ відрізка становить 6 см.

У цій задачі ми знайшли величину дробу $\frac{3}{5}$ від цілого відрізка завдовжки 10 см. Коротко кажучи, ми знайшли дріб від числа.

Після виконання цього завдання пропонуємо учням порівняти дві задачі.

5. Порівняйте задачі і розв'яжіть їх.

1) Учень почав читати книгу, яка містить 140 сторінок. Першого дня він прочитав $\frac{1}{7}$ книги. Скільки сторінок він прочитав цього дня?

2) Учень почав читати книгу, яка містить 140 сторінок. Першого дня він прочитав $\frac{5}{7}$ усієї книги. Скільки сторінок він прочитав цього дня?

$$1 — m$$
$$\frac{1}{b} — ?$$

$$1 — m$$
$$\frac{a}{b} — ?$$

Запитуємо учнів, чим відрізняються ці задачі; у якій задачі одержимо більше число у відповіді; чому. Пропонуємо розв'язати задачу 1. Запитуємо, що потрібно знайти в задачі 1. [Частину від числа.] Просимо показати опорну схему цієї задачі, згадати, як знайти частину від числа; розв'язати задачу 1.

Запитуємо, що потрібно знайти в задачі 2: частину чи дріб від числа; як слід змінити короткий запис задачі 1, щоб одержати короткий запис задачі 2. Просимо виконати ці зміни.

Запитуємо учнів, чи допоможе розв'язок задачі 1 знайти розв'язок задачі 2. Пропонуємо учням розв'язати задачу 2. Запитуємо, про що дізнаємося першою дією; другою дією. Просимо сформулювати висновок про розв'язування задач, у яких потрібно знайти дріб від числа.

ПАМ'ЯТКА

Знаходження дробу від числа

$$1 — m$$
$$\frac{a}{b} — ?$$

1) $m : b = \square$ — величина 1 частини цілого

2) $\square \cdot a = \square$ — величина дробу від цілого

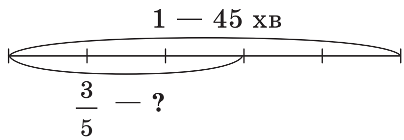
1. Знаходжу величину однієї частини цілого.
2. Знаходжу величину дробу від цілого.

Для закріплення одержаного висновку пропонуємо учням розв'язати задачу.

6. Розв'яжіть задачу.

Урок триває 45 хв. З них $\frac{3}{5}$ уроку учні виконували самостійну роботу. Скільки часу тривала самостійна робота?

1 — 45 хв
$\frac{3}{5}$ — ?



Наводимо методику розв'язання цієї задачі. Що позначає число 45? [Тривалість уроку.] Що позначає число $\frac{3}{5}$? [Число $\frac{3}{5}$ позначає, яку частину цілого уроку тривала самостійна робота.] Що позначає знаменник 5? [Знаменник 5 позначає, що цілий урок розділили на 5 рівних частин.] Що позначає чисельник 3? [Чисельник 3 позначає, що самостійна робота тривали 3 такі частини уроку.] Що потрібно знайти в цій задачі мовою математики? [Дріб від числа.]

Розкажіть план розв'язування таких задач. Запишіть розв'язання і відповідь.

Розв'язання:

1) $45:5=9$ (хв) — величина $\frac{1}{5}$ уроку.

2) $9\cdot 3=27$ (хв) — величина $\frac{3}{5}$ уроку.

$45:5\cdot 3=27$ (хв)

Відповідь: 27 хв тривала самостійна робота.

Після розв'язання достатньої кількості простих задач на знаходження дробу від числа можна зробити індуктивне узагальнення.

Щоб знайти дріб від числа, потрібно це число поділити на знаменник і результат помножити на чисельник.

1 — m
$\frac{a}{b}$ — ?

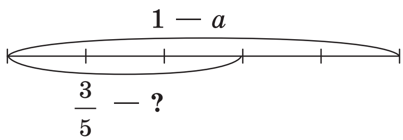
$\rightarrow$ $m:b\cdot a$

Зазначимо, що під час розв'язування складених задач записуємо знаходження дробу від числа виразом.

З метою відпрацювання вміння читати і записувати дроби, а також знаходити дріб від числа пропонуємо учням виконати такі завдання.

7. Розв'яжіть задачу.

У змаганнях брали участь a дітей. Хлопчики становили $\frac{3}{5}$ усіх учасників змагань. Скільки було хлопчиків?



8. Запишіть: $\frac{3}{4}$ від числа a; $\frac{5}{7}$ від числа b; $\frac{m}{n}$ від числа 60.

9. Знайдіть: $\frac{5}{6}$ від 18; $\frac{3}{11}$ від 55.

10. Запишіть мовою математики:

а) шоста частина від числа a;
б) дванадцята частина від суми чисел b і c;
в) восьма частина від різниці чисел x і y;

11. Знайдіть $\frac{2}{5}$ від 1 год; $\frac{4}{25}$ від 1 ц; $\frac{3}{100}$ від 1 км.

12. Знайдіть:

1) $\frac{2}{7}$ від 35; $\frac{3}{4}$ від 40.

2) скільки метрів у $\frac{3}{4}$ км? у $\frac{2}{5}$ км?

3) скільки кілограмів у $\frac{3}{4}$ ц? у $\frac{3}{4}$ т?

3.2.4. Методика навчання знаходження числа за величиною його дробу

Систему підготовчих завдань до введення правила знаходження числа за величиною його дробу див. за посиланням.

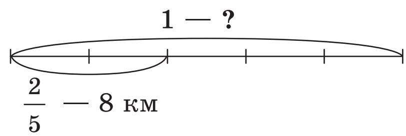
Правило знаходження числа за величиною його дробу вводиться на прикладі задач, які є оберненими до задач на знаходження дробу від числа.

Пропонуємо учням розв’язати задачу.

1. Розв’яжіть задачу.

Яка довжина цілої дороги, якщо її $\frac{2}{5}$ становлять 8 км?

1 — ?
$\frac{2}{5}$ — 8 км



Пояснюємо числові дані задачі: що позначає число $\frac{2}{5}$ [число $\frac{2}{5}$ позначає частину дороги завдовжки 8 км]; що позначає знаменник 5 [знаменник 5 позначає, що всю дорогу розділили на 5 рівних частин]; що позначає чисельник 2 [чисельник 2 позначає, що лише 2 такі частини становлять 8 км]. Запитуємо, скільки кілометрів становить одна така частина.

1) $8 : 2 = 4$ (км) — величина $\frac{1}{5}$ дороги.

Запитуємо, скільки п’ятих частин у цілій дорозі [5]; у скільки разів величина цілої дороги більша за $\frac{1}{5}$ її довжини [у 5 разів].

2) $4 \cdot 5 = 20$ (км) — величина цілої дороги.
$8 : 2 \cdot 5 = 20$ (км)
Відповідь: довжина цілої дороги становить 20 км.

Після аналізу розв’язання цієї задачі школярі роблять висновок про розв’язування задач, у яких потрібно знайти число за величиною його дробу.

ПАМ’ЯТКА

Знаходження числа за величиною його дробу

1 — ?
$\frac{a}{b}$ — k

→

1) $k : a = \square$ — величина 1 частини цілого
2) $\square \cdot b = \square$ — величина цілого

1. Знаходжу величину однієї частини цілого.
2. Знаходжу величину цілого.

Після цього пропонуємо учням порівняти дві задачі.

2. Порівняйте задачі і розв'яжіть їх.

1) Яблука вирішили розкласти в однакові ящики. Коли в один ящик поклали 16 кг яблук, виявилося, що в нього поклали $\frac{1}{5}$ всіх яблук. Скільки кілограмів яблук треба було розкласти в ящики?

2) Яблука вирішили розкласти в однакові ящики. Коли в один ящик поклали 16 кг яблук, виявилося, що в нього поклали $\frac{2}{5}$ усіх яблук. Скільки кілограмів яблук треба було розкласти в ящики?

Пропонуємо учням виконати схематичний рисунок до кожної задачі. Запитуємо, чи це однакові задачі; у чому полягає відмінність. Пропонуємо розв'язати задачу 1. Запитуємо, якою арифметичною дією вона розв'язується; чи можна такою самою арифметичною дією розв'язати задачу 2; чому. Запитуємо, як дізнатися про величину $\frac{1}{5}$ у задачі 2; що для цього слід зробити з величиною $\frac{2}{5}$. Просимо прокоментувати, якою арифметичною дією дізнаємося про величину $\frac{1}{5}$ у задачі 2. Запитуємо, чи можемо ми тепер відповісти на запитання задачі 2; якою арифметичною дією.

Просимо нагадати, якою арифметичною дією в задачі 1 ми знаходили величину цілого за величиною його частини.

Запитуємо, що ми знаходили в задачі 2 [у задачі 2 ми також знаходили величину цілого за величиною його дробу]; чи можна було відповісти на запитання задачі 2 однією дією; чому. Просимо розказати план розв'язування таких задач: яка дія виконується першою; другою.

Пропонуємо скласти обернену задачу до задачі 2 так, щоб невідомою була величина $\frac{2}{5}$. Запитуємо, за яким планом розв'язуватимемо цю задачу; яка дія виконуватиметься першою; другою.

Для закріплення отриманих знань пропонуємо учням виконати аналогічне завдання.

3. Порівняйте задачі і розв'яжіть їх.

1) У кіоск привезли 240 зошитів. Зошити в клітинку становили $\frac{2}{6}$ усіх зошитів. Скільки зошитів у клітинку привезли в кіоск?

2) У кіоск привезли 240 зошитів у клітинку, що становило $\frac{2}{6}$ усіх зошитів. Скільки всього зошитів привезли в кіоск?

Наводимо методику розв'язання цих задач. Виконайте схематичний рисунок до кожної задачі. Чим схожі ці задачі? Чим вони відрізняються? Чи матимуть вони однакові розв'язання? Чому? Розв'яжіть кожну задачу по діях із поясненнями.

Як знаходили дріб від числа в задачі 1? [Першою дією величину цілого (240 зошитів) поділили на знаменник 6 — одержали величину $\frac{1}{6}$. Другою дією отриманий результат помножили на чисельник 2; одержали величину $\frac{2}{6}$.]

Як знаходили число за величиною його дробу в задачі 2? [Першою дією величину дробу поділили на чисельник 2 — одержали величину $\frac{1}{6}$. Другою дією отриманий результат помножили на чисельник 6 — одержали величину цілого.]

Запишіть розв'язання обох задач виразами. Порівняйте ці вирази.

Як знайти дріб від числа? [Щоб знайти дріб від числа, потрібно величину цілого поділити на знаменник і помножити на чисельник.]

Як знайти число за величиною його дробу? [Щоб знайти ціле за величиною його дробу, потрібно величину дробу розділити на чисельник, а потім помножити на знаменник.]

Робимо індуктивне узагальнення.

> Щоб знайти число за величиною його дробу, потрібно величину дробу поділити на чисельник і результат помножити на знаменник.
>
> $$\boxed{\begin{array}{l} 1 \text{ — } ? \\ \frac{a}{b} \text{ — } k \end{array}} \longrightarrow \boxed{k : a \cdot b}$$

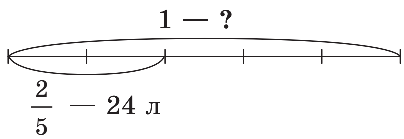
З метою відпрацювання вміння знаходити дріб від числа і число за величиною його дробу, а також вміння розв'язувати відповідні сюжетні задачі пропонуємо учням виконати завдання.

4. Знайдіть число: $\frac{4}{9}$ якого становлять x; $\frac{3}{4}$ якого становлять y; $\frac{m}{n}$ якого становлять 50.

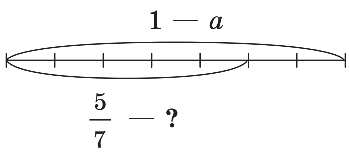
5. Знайдіть число, $\frac{4}{12}$ якого становлять 28; 160.

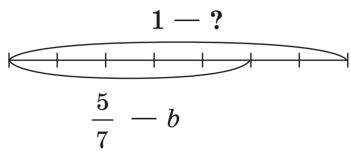
6. Розв'яжіть задачу.

В акваріум налили 24 л води, заповнивши $\frac{2}{5}$ його місткості. Скільки літрів води містить акваріум?



7. Поясніть за малюнком, як знайти $\frac{5}{7}$ від числа a; як знайти число, якщо його $\frac{5}{7}$ становлять b.

а)


б)


8. Знайдіть: $\frac{5}{6}$ від 42; $\frac{3}{11}$ від 55.

9. Знайдіть число: $\frac{2}{9}$ якого становлять 36; $\frac{4}{7}$ якого становлять 56.

10. Розв'яжіть задачі.

1) У класі 4 відмінники, що становить $\frac{2}{11}$ усіх учнів класу. Скільки всього учнів у класі?

2) У змаганнях брали участь a дітей. Хлопчики становили $\frac{7}{12}$ усіх учасників змагань. Скільки хлопчиків брали участь у змаганнях?

3) У кошику b яблук, що становить $\frac{4}{9}$ усіх фруктів, що лежать у кошику. Скільки всього фруктів лежить у кошику?

11. Знайдіть число, якщо:

1) його сьома частина становить d;

2) його дев'ята частина становить $m + n$;

3) його сота частина становить $b : a$.

3.2.5. Формування уявлення про дріб як частку двох натуральних чисел

1. Розв'яжіть задачу.

Четверо дітей вирішили поділити 3 шоколадки порівну. Як це можна зробити? Яку частину шоколадки отримає кожна дитина?

Виконуємо дію практично.

Отже, кожна дитина отримає по $\frac{3}{4}$ шоколадки.

При діленні 3 шоколадок порівну між 4 дітьми кожна дитина отримає по 3 шматочки, які дорівнюють $\frac{1}{4}$ шоколадки, або $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$.

Після виконання завдання запитуємо, якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі. [Дією ділення.] $3:4 = \frac{3}{4}$.

> Якщо m однакових предметів поділити на k рівних частин, то кожна частина буде складати $\frac{m}{k}$ цілого предмета.
>
> $$m : k = \frac{m}{k}$$

Отже, за допомогою дробів можна записати результат ділення двох натуральних чисел.

$4:7 = \frac{4}{7}$ $\qquad$ $2:3 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $7:11 = \frac{7}{11}$

Ділене дорівнює чисельнику дробу, а дільник — знаменнику. Отже, риску дробу можна розуміти як знак ділення.

2. Розв'яжіть задачу.

Між 5 дітьми розділили 3 однакові груші. Яку частину груші отримала кожна дитина?

3. Запишіть у вигляді дробу частку чисел: 5 : 12; 6 : 27; $x : y$; $5 : c$.

4. Замініть кожен дріб часткою чисел: $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{c}{k}$.

Докладніше про прості задачі, які передбачають визначення, яку частину одне число становить від іншого, див. за посиланням.

Після розв'язання достатньої кількості задач узагальнюємо види задач, які містять дроби.

Задачі з дробами

$$\begin{array}{l} 1 — m \\ \dfrac{a}{b} — k \end{array}$$

m — число, яке прийняте за одиницю рахунку або виміру;

k — частина числа m, подана дробом $\frac{a}{b}$.

Вид задачі визначається тим, яка з величин m, k або $\frac{a}{b}$ невідома.

1. Знаходження дробу від числа

Щоб знайти дріб від числа, потрібно це число поділити на знаменник і результат помножити на чисельник.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 — m \\ \dfrac{a}{b} — ? \end{array}} \rightarrow \boxed{k = m : b \cdot a}$$

2. Знаходження числа за величиною його дробу.

Щоб знайти число за величиною його дробу, потрібно величину дробу поділити на чисельник і результат помножити на знаменник.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 — ? \\ \dfrac{a}{b} — k \end{array}} \rightarrow \boxed{m = k : a \cdot b}$$

3. Яку частину одне число складає від іншого (m від k).

Щоб подати дробом частину, яку одне число (m) складає від іншого (k), треба перше число (m) поділити на друге (k).

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 — m \\ ? — k \end{array}} \rightarrow \boxed{\dfrac{a}{b} = m : k}$$

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ У 3–4 КЛАСАХ

4.1. ВИДИ ПРОСТИХ ЗАДАЧ У 3 КЛАСІ ТА МЕТОДИКА РОБОТИ НАД НИМИ

У 3 класі учні продовжують розв'язувати відомі їм 14 видів простих задач:

- **задачі, що містять співвідношення поєднання частин у ціле:**

1) задачі на знаходження суми,
2) на знаходження невідомого доданка,
3) на знаходження суми трьох доданків,
4) на знаходження третього числа за сумою двох чисел;

- **задачі, що містять співвідношення вилучення частини з цілого:**

5) задачі на знаходження різниці,
6) на знаходження невідомого зменшуваного,
7) невідомого від'ємника;

- **задачі, що містять співвідношення різницевого порівняння:**

8) задачі на різницеве порівняння,
9) на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць;

- **задачі, що містять співвідношення поєднання рівних частин у ціле:**

10) задачі на суть арифметичної дії множення;

- **задачі, що містять співвідношення розбиття цілого на рівні частини:**

11) задачі на ділення на рівні частини,
12) на ділення на вміщення;

- **задачі, що містять співвідношення кратного порівняння:**

13) задачі на кратне порівняння,
14) на збільшення або зменшення числа в кілька разів.

Робота над простими задачами здійснюється за пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Працюю над простою задачею

1. Читаю задачу й уявляю, про що в ній розповідається.
2. Виділяю ключові слова та складаю короткий запис задачі.
3. За коротким записом пояснюю числові дані задачі. Виконую схематичний рисунок.
4. Повторюю запитання задачі. З'ясовую, що потрібно знати, щоб на нього відповісти.
5. Записую розв'язання задачі.
6. Записую відповідь.

На початку навчального року відбувається узагальнення і систематизація знань учнів про вивчені ними види простих задач. Детальніше див. за посиланням.

Особливу увагу доцільно приділити роботі зі складання та розв'язування обернених задач. Детальніше див. за посиланням.

Зважаючи на те, що задачі, які містять співвідношення кратного порівняння, були введені наприкінці навчального року в 2 класі, під час узагальнення і систематизації знань учнів про прості задачі доцільно приділити особливу увагу задачам на збільшення або зменшення числа в кілька разів та задачам на кратне порівняння. Детальніше див. за посиланням.

У 3 класі учні ознайомлюються з новими видами простих задач:

1) задачі із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами;
2) на знаходження частини від числа;
3) на знаходження числа за величиною його частини;
4) на знаходження периметра многокутника;
5) на час.

Також у 3 класі розглядаються задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, сформульовані в непрямій формі. Детальніше див. за посиланням.

МЕТОДИКА ОЗНАЙОМЛЕННЯ ІЗ ЗАДАЧАМИ ІЗ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИМИ (ПРОПОРЦІЙНИМИ) ВЕЛИЧИНАМИ

Задачі із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами вводяться тоді, коли учні вже добре засвоїли конкретний зміст арифметичних дій множення і ділення, але стикаються з певними труднощами, щоразу зустрічаючись із новими величинами. З огляду на це вважаємо за необхідне проводити спеціальну роботу з ознайомлення школярів із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами.

Отже, ознайомлюємо учнів із такими групами взаємопов'язаних (пропорційних) величин та зв'язками між ними:

- маса одного предмета, кількість предметів, загальна маса;
- місткість однієї посудини, кількість посудин, загальна місткість;
- довжина одного відрізу, кількість відрізів, загальна довжина;
- ціна товару, кількість товару, загальна вартість;

- продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток;
- витрата на один виріб, кількість виробів, загальна витрата.

Ці групи взаємопов'язаних (пропорційних) величин можна ввести за планом:

1) ознайомлення з термінами: «загальна маса», «загальна довжина», «загальна місткість»; прямо пропорційна залежність між величинами; знаходження загального значення величини;
2) обернено пропорційна залежність між величинами; знаходження значення величини одиниці виміру або кількості за двома іншими відомими значеннями величин;
3) прості задачі із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами;
4) зміна загальної величини залежно від зміни іншої величини (величини одиниці виміру або кількості) при сталій третій величині (кількості або одиниці виміру);
5) зміна кількості залежно від зміни величини одиниці виміру при сталій загальній величині; зміна кількості залежно від зміни загальної величини при сталій величині одиниці виміру;
6) зміна величини одиниці виміру залежно від зміни загальної величини при сталій кількості; зміна величини одиниці виміру залежно від зміни кількості при сталій загальній величині;
7) ознайомлення з величинами: «ціна», «кількість предметів», «вартість»;
8) задачі з величинами: «ціна», «кількість предметів», «вартість»; зміна однієї величини залежно від зміни іншої при однаковій третій величині;
9) ознайомлення з величинами: «продуктивність праці», «час роботи», «загальний виробіток»;
10) ознайомлення з іншими взаємопов'язаними (пропорційними) величинами.

Ознайомлення з пропорційними величинами здійснюється шляхом розв'язування простих задач.

1. Розв'яжіть задачі.

1) Мама купила на базарі 2 кг огірків, 1 кг помідорів та 3 кг картоплі. Знайдіть масу всіх овочів.
2) Мама купила 3 пачки солі, по 1 кг кожна. Знайдіть загальну масу солі.

Пропонуємо учням виконати схематичний рисунок до задачі 1 і показати масу всіх овочів. Запитуємо, як можна дізнатися про масу всіх овочів. [Слід додати маси всіх овочів:

2+1+3=6 (кг) — усього овочів купила мама.] Масу всіх овочів можна назвати *загальною масою* овочів.

Пропонуємо учням виконати схематичний рисунок до задачі 2. Просимо порівняти задачі 1 і 2: чим вони схожі [в обох задачах ідеться про масу декількох предметів і треба знайти *загальну масу*]; чим вони відрізняються [у задачі 1 ідеться про предмети, що мають різну масу, а в задачі 2 — про предмети, що мають однакову масу]. Запитуємо, як можна знайти *загальну масу* кількох однакових предметів — однакових пачок солі. [Щоб визначити *загальну масу* солі, можна додати маси усіх пачок солі: 1+1+1=3 (кг) — *загальна маса* солі; але тут маємо суму однакових доданків, а в математиці суму однакових доданків можна замінити арифметичною дією множення, тому цю задачу можна розв'язати дією множення: 1·3=3 (кг) — *загальна маса* солі.] Просимо учнів пояснити числа задачі: що позначає число 1 [масу однієї пачки солі]; що позначає число 3 [стільки пачок солі купила мама]. Запитуємо, як можна інакше пояснити число 3. [«Скільки предметів?» — це кількість предметів.] Зважаючи на це, просимо сформулювати правило про те, як дізнатися величину *загальної маси* кількох однакових предметів. [Щоб знайти *загальну масу* кількох однакових предметів, треба *масу одного предмета помножити на кількість предметів*.]

Аналогічно здійснюється ознайомлення з величинами «загальна довжина» та «загальна місткість». Аналізуючи розв'язки задач, виводимо правила знаходження числового значення загальної величини за двома відомими числовими значеннями інших величин.

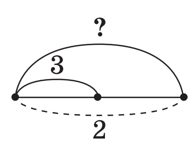
Правило знаходження загальної величини

Маса Довжина Місткість 1	· Кількість	=	Загальна	маса довжина місткість

Застосовуючи це правило, учні розв'язують задачі, у яких подано вимогу знайти загальну величину і до яких наведено схематичний рисунок. Наприклад, такі.

2. Розв'яжіть задачу.

У двох бутлях по 3 л соку. Знайдіть загальну місткість соку.



Також пропонуються завдання на переформулювання запитання задачі так, щоб у ньому було явно вказано, значення якої величини слід знайти.

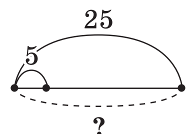
3. Переформулюйте запитання задачі. Розв'яжіть задачу.
Тато приніс 2 сітки по 4 кг картоплі. Скільки всього кілограмів картоплі приніс тато?

Після розв'язання задачі пропонуємо учням додаткові запитання: «Що станеться із загальною масою картоплі, якщо кількість сіток збільшиться? зменшиться?»

4. Не розв'язуючи задачі, змініть числові значення величин так, щоб у відповіді одержати більше (менше) число.
1) Мама купила 4 пакети соку, по 2 л у кожному. Скільки всього літрів соку купила мама?
2) Для виготовлення закладок дівчинка відрізала від стрічки 5 разів по 2 дм. Скільки всього дециметрів відрізала від стрічки дівчинка?
3) 8 школярів збирали полуницю, причому кожний із нихназбирав по 2 кг полуниці. Скільки всього кілограмів полуниці назбирали школярі?

Отже, спочатку вводиться правило знаходження загальних величин (маси, довжини, місткості), і лише після цього на основі правил знаходження невідомих множників вводяться правило знаходження величини одиниці виміру та правило знаходження кількості. Учні вчаться застосовувати ці правила при розв'язуванні задач.

5. Числове значення якої величини є шуканим? Згадайте правило, як знайти невідому величину.
У супермаркеті 25 кг цукру розфасували по пакетах, по 5 кг у кожний. Скільки одержали пакетів із цукром?



Далі учні вчаться виділяти в задачах групи величин; з'ясовувати, якими числовими даними вони подані і значення якої величини є шуканим; записувати задачу коротко у вигляді таблиці; актуалізувати правило знаходження шуканої величини та застосовувати його для розв'язування задачі.

На цьому етапі пропонуються задачі з трьома групами взаємопов'язаних (пропорційних) величин (маса одного предмета, кількість предметів, загальна маса; місткість однієї посудини, кількість посудин, загальна місткість; довжина одного відрізу, кількість відрізів, загальна довжина). Розв'язуючи задачі на знаходження загальної величини, або на знаходження величини одиниці виміру, або на знаходження значення кількості з опорою на наочне подання відповідних правил або груп величин, учні опрацьовують дію **виділення величин**, що містяться в задачі.

При розв'язуванні задач на знаходження однієї з трьох величин учням спочатку подаються зразки коротких записів у вигляді таблиці, а потім вони складають короткий запис задачі самостійно на основі знання груп взаємопов'язаних (пропорційних) величин та володіючи загальним підходом до їх визначення:

1) на основі найменувань, що стоять поряд із числами задачі, визначити, про яку величину йде мова в задачі: якщо в задачі є іменоване число, подане в кілограмах (грамах, тоннах тощо), то в задачі йдеться про масу; якщо іменоване число подане в сантиметрах (метрах, дециметрах тощо), то мова йде про довжину; якщо іменоване число подано в літрах, то йдеться про місткість;
2) згадати групу величин, що пов'язані із масою, або довжиною, або місткістю.

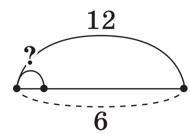
Широко застосовується **складання і розв'язування трійок взаємно обернених задач** із заданою групою пропорційних величин.

6. Розв'яжіть задачу.

Теслярі розпиляли колоду завдовжки 12 м на 6 рівних частин. Яка довжина кожної частини?

Розглянемо методику роботи над задачею.

Прочитайте задачу та уявіть, про що в ній ідеться. [У задачі йдеться про те, що теслярі розрізали колоду завдовжки 12 м на 6 рівних частин.] Яке запитання задачі? [Яка довжина кожної частини?]



Як ви думаєте, які величини можна виділити в задачі? [Можна виділити довжину всієї колоди, тобто загальну довжину, і на скільки рівних частин її розрізали, тобто кількість частин.]

Яке запитання задачі? [Запитується, яка довжина кожної частини, тобто довжина однієї частини — одиниці виміру.] Запишемо умову задачі у вигляді таблиці з використанням виділених величин.

Довжина 1 частини (м)	Кількість частин (шт.)	Загальна довжина (м)
?	6	12

За коротким записом поясніть числа задачі. Що позначає число 6? [Кількість частин, на які розрізали колоду.] Що позначає число 12? [Загальну довжину колоди, виражену в метрах.]

Яке запитання задачі? [Яка довжина однієї частини?] Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — загальну довжину колоди (відомо, 12 м) та II — кількість частин, на які розрізали колоду (відомо, на 6 частин).] Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Діленням.] Чи можна відповісти на запитання задачі відразу? [Так.] Чому? [Тому що відомі обидва числові значення.]

Запишемо розв'язання. Як слід міркувати, щоб 12 поділити на 6? [12 поділити на 6 — це означає знайти таке число, яке при множенні на 6 дає 12, це число 2 — $12:6=2$ (м).]

Запишемо відповідь. [Відповідь: 2 м — довжина однієї частини колоди.]

Значення якої величини ми знайшли в цій задачі? Розкажіть правило, як знайти довжину однієї частини. Як ви його вивели? [На підставі розв'язання цієї задачі.] А як можна міркувати, не спираючись на розв'язок цієї задачі? Чому дорівнює загальна довжина? [Загальна довжина дорівнює добутку довжини однієї частини і кількості частин, тобто загальна довжина — це добуток, довжина однієї частини — це перший множник, кількість частин — це другий множник.]

Правило знаходження загальної довжини

I множник		II множник		Добуток
Довжина 1 предмета	·	Кількість	=	Загальна довжина

Як на підставі взаємозв'язку між добутком і множником вивести правило для знаходження довжини одного предмета? [Якщо добуток — загальну довжину — поділити на другий множник — кількість, то одержимо перший множник — довжину одного предмета.] Розкажіть правило, як знайти довжину одного відрізу.

Розкажіть правило, як знайти кількість предметів.

Випишіть числа задачі: 12, 2, 6. Поясніть, що позначають ці числа. Складіть обернену задачу так, щоб невідомою була кількість частин. Розв'яжіть одержану задачу.

Складіть обернену задачу так, щоб невідомою була загальна довжина. Розв'яжіть цю задачу.

Потім обговорюються запитання про **залежність загальної величини від зміни однієї з двох інших величин при сталій третій величині** та **залежність величини одиниці виміру від зміни кількості при сталій загальній величині.**

Наприклад, розглянемо зміну кількості залежно від зміни величини одиниці виміру при сталій загальній величині.

Пропонуємо учням уявити, що 24 кг борошна спочатку розсипали в пакети по 3 кг кожний, а потім таку ж саму масу борошна розсипали в пакети по 4 кг кожний. Запитуємо, у якому випадку отримали більшу кількість пакетів борошна; у якому — меншу. Пропонуємо висловити припущення, що стане з кількістю предметів (при однаковій загальній масі), якщо маса одного предмета збільшиться (зменшиться).

Пропонуємо учням знайти підтвердження свого висновку в таблиці. Просимо уважно розглянути три випадки, подані в таблиці. Запитуємо, значення якої величини не змінюються; значення якої величини змінюються. Це змінна величина. Запитуємо, значення якої величини треба відшукати. Просимо знайти кількість предметів у кожному випадку.

Маса 1 предмета (кг)	Кількість предметів (шт.)	Загальна маса (кг)
2	?	12
3	?	12
4	?	12

Пропонуємо учням розглянути одержані результати. Запитуємо, у якому випадку кількість найбільша; найменша. Запитуємо, чому так відбувається; яка існує залежність між кількістю та масою одного предмета при однаковій загальній масі.

Далі учні виконують аналогічні завдання з іншими групами взаємопов'язаних величин.

Докладніше про методику ознайомлення учнів із групами взаємопов'язаних величин див. за посиланням.

Після ознайомлення з групами величин, які пов'язані з масою, довжиною та місткістю, вводимо наступну групу величин: ***«ціна», «кількість», «вартість»***.

На підставі порівняння трьох відомих груп взаємопов'язаних величин учні встановлюють, що в кожній групі є загальна величина, величина одиниці виміру та кількість. Учитель повідомляє, що якщо об'єктом задачі є процес купівлі або продажу, то вона містить величини: ціну, кількість товару і вартість. Далі йде пояснення, що **вартість** — це кількість грошей, які сплачують за всю покупку, а **ціна** — це вартість однієї речі. Отже, уся покупка характеризується: *вартістю*, або загальною вартістю, — кількістю грошей, які заплатили за покупку; *ціною* — вартістю однієї речі — та *кількістю* речей. Учні порівнюють нову групу взаємопов'язаних величин із кожною з трьох розглянутих раніше груп та визначають, що спільними є наявність загальної величини (вартість, загальна маса, загальна довжина, загальна місткість), величини одиниці виміру (ціна, маса одного предмета, довжина одного відрізу, місткість однієї посудини) та кількості. Далі згадується, що загальна величина — це добуток величини одиниці виміру та кількості; робиться висновок про знаходження вартості покупки. На основі правила знаходження невідомого множника з правила знаходження вартості отримуємо правила знаходження ціни і кількості. Це можна зробити шляхом виконання таких завдань.

7. Складіть задачі з кожною із трьох груп взаємопов'язаних величин із числами: ?, 5, 9.

Записуємо, якою арифметичною дією знаходять загальне значення величини в кожному випадку; чому; чи можна такою ж дією знайти загальну вартість покупки. Просимо сформулювати це правило.

Правило знаходження загальної вартості

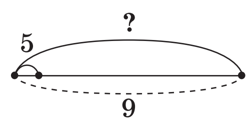
Щоб знайти загальну вартість, треба ціну помножити на кількість.

Ціна · Кількість = Загальна вартість

8. Складіть задачу з цими ж числами, але про покупку. Запишіть одержану задачу коротко у вигляді таблиці.

Ціна — вартість 1 речі (грн)	Кількість речей (шт.)	Загальна вартість (грн)
5	9	?

Наводимо методику роботи над задачею.



За коротким записом поясніть числа задачі. Яке запитання задачі? Більше чи менше число від 5 одержимо у відповіді? Чому?

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — ціну (відомо, 5 грн) та II — кількість (відомо, 9 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Дією множення.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Так, оскільки нам відомі обидва числові значення.]

Запишіть розв'язання задачі. [5 · 9 = 54 (грн).] Запишіть відповідь. [54 грн — вартість покупки.]

Після розв'язання задачі учні додають нову групу величин до узагальненої таблиці пропорційних величин. Отже, ми розглянули чотири основних правила на знаходження загального значення величини. Просимо учнів сформулювати ці правила. Запитуємо, які правила можна з них вивести і на підставі чого. Просимо висловити думку, чи є щось спільне в знаходження величини (маси, довжини, місткості) однієї одиниці. [Так, щоб знайти величину (масу, довжину, місткість) одного предмета, потрібно загальне значення (маси, довжини, місткості) поділити на кількість.]

Запитуємо, чи можна так само знайти вартість одного предмета — ціну. Просимо сформулювати відповідне правило.

Правило знаходження ціни

Щоб знайти ціну, потрібно загальну вартість поділити на кількість.

Ціна = Загальна вартість : Кількість

Запитуємо учнів, чи є щось спільне в знаходженні кількості. [Так, щоб знайти кількість, потрібно загальне значення величини (маси, довжини, місткості) поділити на значення величини (маси, довжини, місткості) одного предмета.]

Запитуємо, як можна знайти кількість предметів, які купили. Просимо сформулювати відповідне правило.

Правило знаходження кількості

Щоб знайти кількість, потрібно загальну вартість поділити на ціну.

Кількість = Загальна вартість : Ціна

Учні розв'язують задачі на знаходження вартості, або ціни, або кількості. Далі можна розглянути питання про зміну вартості залежно від зміни кількості або ціни; про зміну ціни залежно від зміни вартості або кількості; про зміну кількості залежно від зміни вартості або ціни. Докладніше див. за посиланням.

Величини ***«продуктивність праці»***, ***«час роботи»*** та ***«загальний виробіток»*** вводимо на основі порівняння двох задач, у яких дуже схожа ситуація (наприклад, йде мова про кравчиню), але в першій задачі містяться величини однієї з відомих груп пропорційних величин (загальна довжина (витрата) тканини, довжина (витрата) тканини на один виріб, кількість виробів), а в другій — описується процес роботи, тому міститься нова група взаємопов'язаних (пропорційних) величин: продуктивність праці, час роботи й загальний виробіток.

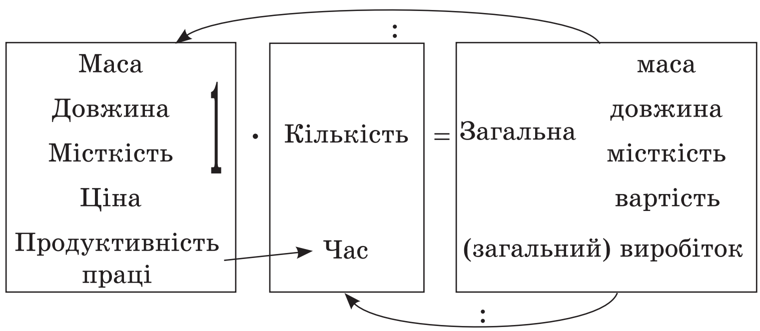
9. Розв'яжіть задачі.

1) Кравчиня пошила 8 наборів серветок, витрачаючи на кожний набір по 3 м тканини. Скільки всього метрів тканини витратила кравчиня на серветки?

2) Кравчиня щогодини шиє по 4 набори серветок. Скільки наборів серветок пошиє кравчиня за 3 год роботи?

Над задачею 2 працюємо аналогічно. Виділяємо групу величин, яку поки що називаємо відповідно до задачі: «кількість виробів за 1 год», «час роботи» і «загальна кількість виробів». Далі повідомляємо, що загальна кількість виробів називається загальним виробітком, кількість виробів за одиницю часу — продуктивністю праці. Отже, учні ознайомлюються з новою групою взаємопов'язаних величин: «продуктивність праці», «час роботи» і «загальний виробіток». Після розв'язання задачі 2 учні додають нову групу величин до узагальненої таблиці пропорційних величин.

Групи пропорційних величин.
Взаємозв'язок між величинами



Школярі формулюють правила знаходження продуктивності праці, часу роботи і загального виробітку. Закріплення цих правил здійснюється при розв'язуванні задач, які описують роботу різних виконавців: друкарки, робітника, насоса тощо, а також при складанні й розв'язуванні задач за поданими схематичними рисунками. Широко застосовуємо спосіб перевірки правильності розв'язання задачі на основі складання і розв'язування обернених задач.

Крім поданих груп пропорційних величин, задачі містять ще й інші групи пропорційних величин. Методикою роботи над задачами з пропорційними величинами передбачено під час ознайомлення зі змістом задачі і аналізу її умови проведення спеціальної роботи з виділення величин, які містить задача.

10. Розв'яжіть задачу.

Щоб отримати 1 кг заліза, потрібно 3 кг залізної руди. Скільки кілограмів заліза отримаємо із 18 кг залізної руди?

Розглянемо методику роботи над задачею. Прочитайте задачу та уявіть, про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі? [У задачі розповідається про виготовлення заліза із залізної руди: беруть залізну руду і з неї виплавляють залізо. Залізо отримують не зі всієї залізної руди, а тільки з частини, тому що під час перероблення залізної руди отримують не тільки залізо, а ще й інші продукти. Відомо: для того щоб отримати 1 кг заліза, потрібно 3 кг залізної руди. Запитується, скільки кілограмів заліза отримаємо із 18 кг залізної руди.]

Які величини містяться в задачі? 3 кг — це значення якої величини? [У кілограмах вимірюється маса, тому 3 кг — це маса залізної руди, необхідної для виготовлення 1 кг заліза.] 18 кг — це значення якої величини? [У кілограмах вимірюється маса, тому 18 кг — це маса залізної руди.] Щоб відрізнити ці величини, домовимося 18 кг називати загальною масою залізної руди.

Про що запитується в задачі? [У задачі запитується, скільки кілограмів заліза отримають.] Яка величина вимірюється в кілограмах? [Маса.] Про яку величину запитується? [Про масу заліза.]

Отже, ми виділили величини: загальна маса залізної руди, маса залізної руди на 1 кг заліза, маса заліза.

У подібних задачах загальною величиною буде *величина вихідного продукту*, величиною однієї одиниці — *величина вихідного продукту на одиницю нового* продукту, і третьою є *величина нового продукту*. Докладніше див. за посиланням.

Отже, на основі розв'язування простих задач із взаємопов'язаними величинами навчаємо школярів виділяти величини задачі; записувати такі задачі коротко у вигляді таблиці; пояснювати числові дані і запитання задачі відповідно до виділених величин; установлювати зв'язок між шуканою величиною і даними в задачі величинами. Робота над задачами із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами здійснюється за пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА
Працюю над задачею
із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами

1. Читаю задачу й уявляю, про що в ній розповідається.
2. Виділяю величини, про які йдеться в задачі; виділяю ключові слова.
3. Записую задачу коротко у вигляді таблиці.
4. За коротким записом пояснюю числові дані задачі і виконую схематичний рисунок; визначаю, яка величина є шуканою.
5. Визначаю зв'язок шуканої величини з даними величинами.
6. Записую розв'язання задачі.
7. Записую відповідь.

Методику роботи з простими задачами на знаходження частини від числа та числа за величиною його частини див. за посиланням.

Методику роботи з простими задачами на час (знаходження тривалості події, знаходження часу початку або часу закінчення події) див. за посиланням.

4.2. ВИДИ СКЛАДЕНИХ ЗАДАЧ У 3 КЛАСІ ТА МЕТОДИКА РОБОТИ НАД НИМИ

У 2 класі учні ознайомились із поняттям складеної задачі як такої, яку не можна розв'язати, виконавши одну арифметичну дію.

У 3 класі на початку навчального року узагальнюються і систематизуються знання учнів щодо структури складеної задачі та порядку роботи над складеними задачами. Докладніше про узагальнення і систематизацію поняття складеної задачі в 3 класі див. за посиланням.

4.2.1. Методика формування загального вміння розв'язувати складені задачі

Формування загального вміння розв'язувати складені задачі пропонуємо здійснювати на різноманітних математичних структурах складених задач, не зосереджуючись на відпрацюванні вміння розв'язувати задачі певної структури. Над складеними задачами працюємо за пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Працюю над складеною задачею

1. Читаю задачу й уявляю, про що в ній розповідається.
2. Виділяю ключові слова та складаю короткий запис задачі.
3. За коротким записом пояснюю числові дані та запитання задачі. Виконую схематичний рисунок.
4. Повторюю запитання задачі. З'ясовую, що потрібно знати, щоб на нього відповісти.
   Потрібно знати два числові значення: I — □ (або невідомо) та II — □ (або невідомо).
   З'ясовую, якою арифметичною дією відповім на запитання задачі.

   Чи можна відразу відповісти на запитання задачі?

   Можна **Не можна**

   - *Чому не можна?*
     З'ясовую, що потрібно знати, щоб відповісти на *це запитання.*
     Потрібно знати два числових значення: I — □ (або невідомо) та II — □ (або невідомо).
     З'ясовую, якою арифметичною дією відповім на *це запитання* задачі.
   - *Чи можна відразу відповісти на це запитання задачі?*

     Можна **Не можна**

   Таким чином від запитання задачі переходжу до числових даних.
   Аналіз закінчено.
5. Розбиваю задачу на прості. Формулюю кожну просту задачу. Показую опорну схему кожної задачі.
6. Складаю план розв'язування задачі. З'ясовую, про що дізнаюся першою дією; другою дією.
7. Записую розв'язання задачі.
8. Записую відповідь.

Якщо учень зустрічається із задачею, яку не вміє розв'язувати, то він виконує поступово, одну за одною, дії, які прописані в пам'ятці, — дії, що складають загальне вміння розв'язувати задачі. А якщо математична структура задачі школяреві відома, то відразу після виконання короткого запису та (або) схематичного рисунка він розбиває задачу на прості і формулює план розв'язування задачі.

Певну увагу в 3 класі при роботі над складеною задачею після її розв'язання приділяємо складанню і розв'язуванню обернених задач. Докладніше див. за посиланням.

Розглянемо методику роботи над складеними задачами у 3 класі.

Розв'яжіть задачу.

Господарка купила 15 кг борошна. На печиво вона витратила 7 кг борошна, а на вареники — 5 кг. Скільки кілограмів борошна залишилося в господарки?

Розглянемо методику роботи над задачею.

Виконайте короткий запис задачі самостійно. За коротким записом поясніть числа задачі. Про що запитується в задачі?

Було — 15 кг
Витратила — ?, 7 кг і 5 кг
Залишилося — ?

Складіть план розв'язування задачі і розкажіть розв'язання по діях із поясненням. Розкажіть відповідь. Перевірте правильність розв'язання. Яким способом це можна зробити? [Розв'язати задачу іншим способом або скласти і розв'язати обернену задачу.]

Розкажіть план розв'язування цієї задачі іншим способом.

Випишіть і поясніть числові дані задачі. Складіть обернену задачу так, щоб запитувалося, скільки кілограмів борошна було в господарки спочатку. Самостійно виконайте короткий запис одержаної задачі. За коротким записом поясніть числові дані задачі. Яке запитання задачі?

Було — ?
Витратила — ?, 7 кг і 5 кг
Залишилося — 3 кг

Чим відрізняється обернена задача від прямої? [У прямій задачі відомо, скільки кілограм борошна було, і запитується, скільки кілограмів борошна залишилося; а в оберненій задачі запитується, скільки кілограмів борошна було спочатку, до того як господарка почала його витрачати — зменшувати, і відомо, скільки кілограмів борошна залишилося. У прямій задачі треба було знайти залишок — різницю, а в оберненій — число, що зменшували, — зменшуване.]

Як знайти невідоме зменшуване? [Щоб знайти невідоме зменшуване, потрібно до значення різниці додати від'ємник.]

Що в оберненій задачі є різницею? [Та маса борошна, що залишилася, — 3 кг.] Що є від'ємником? [Та маса борошна, яку витратили, — 7 кг і 5 кг.]

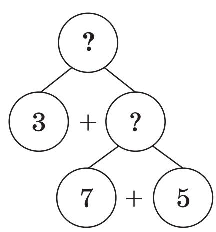
Отже, якщо в задачі потрібно знайти, скільки було до того, як якусь частину віддали, витратили ... і частина залишилася, то це задача на знаходження невідомого зменшуваного.

Опорна схема складених задач
на знаходження невідомого зменшуваного

Віддали
Витратили
...

Було — **?**
________ — ?, □ і □
Залишилося — □

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання оберненої задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — скільки кілограмів борошна залишилося (відомо, 3 кг) і II — скільки кілограмів борошна витратили (поки що невідомо).] Відповімо на запитання задачі дією додавання, оскільки, щоб знайти невідоме зменшуване, потрібно до значення різниці додати від'ємник. Відразу відповісти на запитання задачі ми не можемо, тому що не знаємо, скільки кілограмів борошна витратили. Щоб відповісти на це запитання, потрібно знати два числові значення: I — скільки кілограмів борошна витратили на печиво (відомо, 7 кг) і II — скільки кілограмів борошна витратили на вареники (відомо, 5 кг). На це запитання відповімо дією додавання, тому що треба дізнатися, скільки всього кілограмів борошна витратила господарка. На це запитання можна відповісти відразу, тому що відомі обидва числові значення. Аналіз закінчено.



Покажіть на короткому записі прості задачі.

Складіть план розв'язування задачі. [Першою дією дізнаємося, скільки кілограмів борошна

Було — **?**
Витратила — ?, 7 кг і 5 кг
Залишилося — 3 кг

усього витратили; другою дією дізнаємося, скільки кілограмів борошна було.] Запишіть розв'язання задачі по діях із поясненням і виразом. Прочитайте відповідь.

Складіть задачу на знаходження невідомого зменшуваного з цими ж числами, але з іншою ситуацією. Складіть план розв'язування цієї задачі. Порівняйте його з планом розв'язування попередньої задачі. Порівняйте одержану задачу з попередньою. Що в них спільне? Який висновок можна зробити? [Ми змінили ситуацію задачі, але числа і зв'язки між ними залишили колишніми, це не спричинило зміни в розв'язанні задачі.]

Змініть числові дані задачі. Виконайте зміни на короткому записі. На короткому записі складеної задачі виділіть прості задачі. Що цікаве ви помітили? Який висновок можна зробити? [Усі ці задачі мають однакову математичну структуру.]

Якщо усі ці задачі мають однакову математичну структуру, то який висновок можна зробити щодо плану розв'язування цієї задачі? [План розв'язування цієї задачі буде таким же, як і план розв'язування попередньої задачі: першою дією дізнаємося, скільки всього відняли, а другою — скільки було спочатку.] Складіть вираз. Розкажіть відповідь.

У 3 класі учні розв'язують складені задачі на збільшення або зменшення числа в кілька разів. Види задач на збільшення або зменшення числа в кілька разів та методику роботи над ними див. за посиланням.

У 2 класі ми формували дії, що складають загальне вміння розв'язувати складені задачі: вміння міркувати від запитання задачі до числових даних — аналіз; розбивати складену задачу на прості; установлювати порядок простих задач; формулювати план розв'язування складеної задачі; записувати розв'язання задачі по діях із поясненням; складати вираз, який є розв'язанням задачі; переходити до розв'язування задачі іншим способом; досліджувати вплив зміни умови або запитання задачі на її розв'язання.

У 3 класі зосереджуємо увагу на опрацюванні таких дій: вміння міркувати від числових даних до запитання — синтез; визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру; узагальнювати спосіб розв'язування задач цієї математичної структури. Визначені дії ми формуємо на основі вивчених видів складених задач, а також задач нової математичної структури.

Як бачимо, усі основні дії, які дозволяють учневі самостійно розв'язувати складені задачі, формуються до 3 класу; у 3 класі відпрацьовується дія міркування від числових даних до запитання задачі — синтез, а вміння розв'язувати задачі набуває подальшого засвоєння, скорочується — учні від короткого запису задачі переходять до виділення простих задач і формулювання плану розв'язування складеної задачі. На прикладі задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами здійснюється попереднє ознайомлення з діями визначення істотних ознак задач, узагальнення їх математичних структур та способу розв'язування; формування цих дій відбувається на прикладі задач на знаходження суми; на різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток.

Розглянемо методику введення окремих видів складених задач.

4.2.1.1. Складені задачі, які містять частини — дроби

Пропонуємо учням різноманітні математичні структури складених задач, які містять частини — дроби:

- задачі на знаходження різниці, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: З дослідної ділянки зібрали 100 кг картоплі. П'яту частину всієї картоплі відібрали для посадки на наступну весну, а решту здали в шкільну їдальню. Скільки кілограмів картоплі здали в їдальню?);
- задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на знаходження частини від числа (Наприклад: У шкільному саду 60 дерев. З них $\frac{1}{3}$ — яблуні й $\frac{1}{4}$ — груші. Скільки в саду яблунь і груш разом?);
- задачі на конкретний зміст арифметичної дії ділення, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: У парку 96 дерев. Третю частину цих дерев становлять клени та липи. Скільки окремо кленів і лип у парку, якщо їх порівну?);
- задачі на збільшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: Школярі запланували виготовити для лісопарку 36 годівниць для птахів, а виготовили на третину більше. Скільки годівниць виготовили школярі?);

- задачі на знаходження різниці, які містять дві прості задачі на знаходження частини від числа та просту задачу на знаходження суми (Наприклад: У бочці було 27 л води. Спочатку в бочку долили третю частину того, що в ній було, а потім відлили третину того, що в ній стало. Скільки літрів води залишилося в бочці?);
- задачі на знаходження частини від числа, які містять просту задачу на знаходження числа, яке в кілька разів більше чи менше від даного, та просту задачу на знаходження суми (Наприклад: Першого дня виставку відвідали 120 школярів, а другого — у 3 рази більше. Учні третіх класів становили $\frac{1}{6}$ усіх відвідувачів. Скільки третьокласників відвідало виставку?).

Крім того, розглядаємо задачі, які містять знаходження частини від даного числа, та задачі, які містять знаходження частини від невідомого числа. Детальніше див. за посиланням.

Робота над задачами відбувається за пам'яткою «Працюю над складеною задачею», тобто всі складові дії загального вміння розв'язувати задачі набувають подальшого засвоєння.

Розв'яжіть задачу.

У бочці було 27 л води. Спочатку в бочку долили третю частину того, що в ній було, а потім відлили третину того, що в ній стало. Скільки літрів води залишилося в бочці?

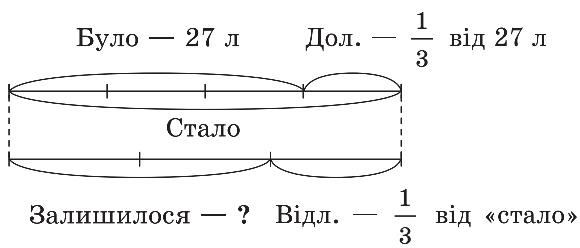
Розглянемо методику роботи над задачею.

Прочитайте задачу та уявіть, про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі? [Про воду.] Що з нею відбувалося? [Вода була в бочці. Спочатку в бочку долили воду, а потім з неї відлили воду. І після цього в бочці ще залишилася вода.] Які ключові слова виділимо в задачі? [Було, долили, відлили, залишилося.]

Було — 27 л
Долили — ?, $\frac{1}{3}$ від 27 л
Відлили — ?, $\frac{1}{3}$ від того, що стало
Залишилося — ?

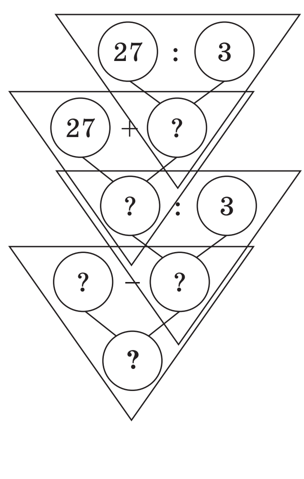
Виконайте короткий запис задачі. За коротким записом поясніть числові дані задачі. [Число 27 позначає, скільки літрів води було в бочці спочатку. Число $\frac{1}{3}$ позначає, яку частину від того, що було, долили. Знаменник цього дробу позначає, що всю воду, яка була в бочці, розділили на 3 рівні частини. Чисельник цього дробу позначає, що долили 1 таку частину. Число $\frac{1}{3}$ позначає, яку частину від того, що стало в бочці, відлили. Знаменник цього дробу позначає, що місткість усієї води, яка стала в бочці, розділили на 3 рівні частини. Чисельник цього дробу позначає, що відлили 1 таку частину.]

Яке запитання задачі? [Скільки літрів води залишилося в бочці?] Виконайте схематичний рисунок.



Виконуємо синтетичні міркування — від числових даних до запитання задачі. Нам відомо, що в бочці було 27 л води, і відомо, що третину від цієї місткості долили. Про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? [Можемо дізнатися, скільки літрів води долили.] Якою арифметичною дією? [Дією ділення: щоб знайти частину від числа, потрібно це число поділити на кількість рівних частин у ньому.]

Знаючи, що в бочці було 27 л води, і знаючи, скільки літрів води долили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? [Скільки літрів води стало в бочці.] Якою арифметичною дією? [Дією додавання.]



Знаючи, скільки води стало в бочці і що третю частину від того, що стало, відлили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? [Можемо дізнатися, скільки літрів води відлили з бочки.] Якою арифметичною дією? [Дією ділення.]

Знаючи, скільки літрів води стало в бочці і скільки літрів води відлили, про що ми можемо дізнатися за цими числовими даними? [Можемо дізнатися, скільки літрів води залишилося в бочці.] Якою арифметичною дією? [Дією віднімання.] Отже, ми від числових даних задачі перейшли до її запитання. Синтез закінчено.

Складіть план розв'язування задачі. [Першою арифметичною дією дізнаємося, скільки літрів води долили в бочку. Другою дією дізнаємося, скільки літрів води стало в бочці. Третьою дією дізнаємося, скільки літрів води відлили з бочки. Четвертою дією дізнаємося, скільки літрів води залишилося в бочці.]

Запишіть розв'язання і відповідь.

Розв'язання:

1) $27 : 3 = 9$ (л) — долили;
2) $27 + 9 = 36$ (л) — стало;
3) $36 : 3 = 12$ (л) — відлили;
4) $36 - 12 = 24$ (л) — стало.

Відповідь: 24 л води стало в бочці.

Докладніше про методику роботи над задачами, які містять частини, див. за посиланням.

4.2.1.2. Складені задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами

На етапі підготовчої роботи актуалізуються вміння розв'язувати прості задачі на знаходження невідомого доданка та вміння розв'язувати складені задачі на знаходження невідомого третього доданка.

Ознайомлення з новим видом задач можна провести так. Розглядаємо дві послідовних задачі на знаходження невідомого доданка, а далі утворюємо з них складену задачу на знаходження невідомого третього числа, на підставі перетворення якої одержуємо задачу нового виду.

Розв'яжіть задачі.

1) Сума двох чисел дорівнює 72. Знайдіть друге число, якщо перше число 24.
2) Сума двох чисел (другого і третього) дорівнює 76. Знайдіть третє число, якщо друге число 48.
3) Сума трьох чисел дорівнює 100. Знайдіть третє число, якщо сума першого і другого чисел дорівнює 72.

4) Сума трьох чисел дорівнює 100. Знайдіть перше число, якщо сума другого та третього чисел дорівнює 76.
5) Сума трьох чисел дорівнює 100. Знайдіть кожне число, якщо сума першого та другого числа 72, а другого та третього числа — 76.

Для того щоб діти усвідомили спосіб розв'язування задач на знаходження трьох чисел за трьома сумами, пропонуємо щоразу порівнювати одержану задачу з попередніми; визначати, що потрібно зробити, щоб отримати одну з попередніх задач, яка розв'язується дуже просто. Отже, визначається спосіб розв'язування задач цієї математичної структури.

Для усвідомлення *істотних ознак* задач цього виду і узагальнення їх способу розв'язування учням пропонується завдання: скласти задачу з тими самими числами, але з іншою ситуацією, наприклад, про ціну ручки, маркера та блокнота. Учні записують задачу коротко, пояснюють числа задачі і складають план розв'язування задачі. Учитель запитує: «Чи потрібно розв'язувати цю задачу? Можливо, розв'язання вже записане на дошці. Чому ці задачі мають однакові розв'язання?» Учні з'ясовують, що обидві задачі містять однакові числа і мають однакову структуру короткого запису, а значить, і склад простих задач, тому вони матимуть однакові розв'язання. Школярі змінюють лише пояснення до арифметичних дій.

Далі вчитель пропонує розв'язати задачу про ціну ручки, маркера та блокнота з іншими числами. Учні виконують зміни в короткому записі попередньої задачі, щоб одержати короткий запис нової задачі. Школярі помічають, що обидві задачі мають однакові ключові слова, так само дані три суми (але різні числові значення), задачі мають однакову математичну структуру. Далі досліджується, як ця зміна вплине на розв'язання, — розв'язання зміниться, тому що числові дані інші, а план розв'язування не зміниться, тому що ця задача має таку саму структуру і склад простих задач. Школярі пояснюють план розв'язування задачі і роблять висновок.

Якщо в запитання задачі входить слово «кожний», то вона містить кілька шуканих чисел. Якщо в задачі три шуканих числа треба знайти за трьома сумами, то вона розв'язуватиметься так:

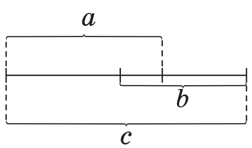
1) від суми трьох чисел віднімемо суму першого та другого чисел — одержимо третє число;
2) від суми трьох чисел віднімемо суму другого та третього чисел — одержимо перше число;

3) від суми першого та другого чисел віднімемо перше число — одержимо друге число; або від суми другого та третього чисел віднімемо третє число — одержимо друге число.

Таким чином узагальнюється *математична структура* задач цього виду і формулюється *узагальнений план їх розв'язування*. На матеріалі цих задач ми здійснили попереднє ознайомлення з діями *визначення істотних ознак задачі; узагальнення її математичної структури та способу розв'язання* задач цього виду. Подальше опрацювання зазначених дій відбуватиметься на матеріалі задач із пропорційними величинами.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами



$$c\begin{cases}\text{I — ?}\\ \text{II — ?}\\ \text{III — ?}\end{cases}\quad a \quad b$$

План розв'язування

1) $(c-b)$ — I число
2) $(c-a)$ — III число
3) $a-(c-b)$
або
$b-(c-a)$ — II число

Потім учні на підставі істотних ознак вчаться впізнавати задачі цього виду і застосовувати для них узагальнений спосіб розв'язування.

На етапі формування вмінь розв'язувати задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами учні складають короткий запис задачі; «впізнають» її; розказують план розв'язування задачі; записують розв'язання і відповідь до задачі; виконують перевірку правильності розв'язання, додаючи знайдені числові значення трьох шуканих величин, і якщо одержують числове дане суми трьох чисел, то роблять висновок про правильність розв'язання задачі. На цьому етапі пропонуються різноманітні види завдань.

- Запишіть задачу коротко. Установіть, до якого виду належить задача. Згадайте спосіб розв'язування таких задач. Розв'яжіть задачу і виконайте перевірку.
- Виконайте схематичний рисунок до задачі і поясніть, про що дізнаємося, знайшовши значення виразів.
- Оцініть правильність розв'язання задачі. Якщо є помилки, виправте їх.

- Поставте запитання до поданої умови й розв'яжіть одержані задачі.
- На які із запропонованих запитань можна відповісти за поданою умовою?
- Доберіть до запитання умову з поданих.
- Змініть запитання задачі так, щоб вона розв'язувалась двома діями.
- Розв'яжіть задачу і порівняйте цю задачу з наступною (оберненою).

Докладніше про методику навчання розв'язування задач на знаходження трьох чисел за трьома сумами див. за посиланням.

4.2.1.3. Задачі на знаходження суми, на різницеве або кратне порівняння двох добутків або часток та обернені до них

Зміст і методику підготовчої роботи до введення задач на знаходження суми, на різницеве або кратне порівняння двох добутків або часток та обернених до них див. за посиланням.

На матеріалі задач, що містять **знаходження суми двох добутків, та обернених до них** здійснюється формування вміння визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру; узагальнювати спосіб розв'язування задач цієї математичної структури.

Попереднє ознайомлення з дією визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури було здійснено при ознайомленні із задачами на знаходження трьох чисел за трьома сумами. Продовжити цю роботу слід при введенні задач на знаходження суми двох добутків.

Ознайомлення із задачами цього виду здійснюється шляхом розв'язування системи навчальних задач. Учням пропонуються дві прості задачі з пропорційними величинами на знаходження загальної величини, а потім вони поєднуються в складену задачу нового виду — на знаходження суми двох добутків.

1. Розв'яжіть задачі. Чи пов'язані вони між собою?

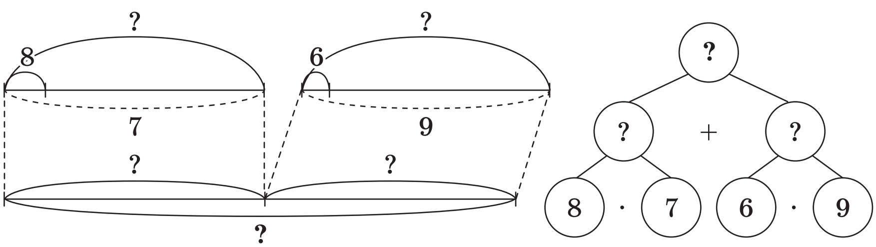
1) До магазину привезли 7 ящиків білого винограду, по 8 кг у кожному ящику. Скільки кілограмів білого винограду привезли до магазину?

2) До магазину привезли 9 ящиків чорного винограду, по 6 кг у кожному ящику. Скільки кілограмів чорного винограду привезли до магазину?

2. Порівняйте задачу з попередніми. Що цікаве ви помітили?
До магазину привезли 7 ящиків білого винограду, по 8 кг у кожному ящику, та 9 ящиків чорного винограду, по 6 кг у кожному ящику. Скільки всього кілограмів винограду привезли до магазину?

	Маса 1 ящика (кг)	Кількість ящиків (шт.)	Загальна маса (кг)
Б.	8 кг	7 шт.	? } ?
Ч.	6 кг	9 шт.	?

Робота над задачею здійснюється за пам'яткою «Працюю над складеною задачею». Учні визначають об'єкти задачі (ключові слова); величини, які містяться в задачі; значення цих величин і записують задачу коротко; після пояснення числових даних задачі виконують схематичний рисунок.



Якщо після проведеної роботи учні можуть відразу перейти до розбиття задачі на прості, то складається план розв'язування задачі й учні переходять до запису розв'язання; в іншому випадку учні виконують аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі і лише після цього розбивають задачу на прості...

Робота над задачею після її розв'язання передбачає дослідження задачі шляхом *зміни величин або числових даних задачі* з метою формування вміння узагальнювати математичну структуру задачі й спосіб її розв'язування. Пропонуємо учням розглянути короткий запис аналогічної задачі, яка містить ті самі числові дані, але інші величини, і визначити, як ця зміна вплине на розв'язання задачі.

	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	8	7	? } ?
II	6	9	?

Учні впевнюються, що розв'язувати задачу немає необхідності: розв'язок ми вже маємо, залишилося лише змінити пояснення.

Потім учням пропонується короткий запис аналогічної задачі з тими самими величинами, що й попередня, але з іншими числовими даними, і ставиться завдання дослідити, як ця зміна вплине на план розв'язування задачі.

	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	9	5	? } ?
II	4	7	?

Школярі з'ясовують, що ця зміна вимагає змінити відповідні числа в арифметичних діях, а пояснення залишити тими самими.

Але і в першому, і в другому випадках загальний план розв'язування задачі не змінюється. Отже, зміна величин задачі та зміна числових даних при заданих зв'язках між ними не впливають на спосіб розв'язування задачі: першою дією (множенням) знаходимо значення загальної величини в першому випадку, другою дією (множенням) знаходимо значення загальної величини в другому випадку, а третьою дією (додаванням) знаходимо суму значень загальних величин у двох випадках. Учні визначають істотні ознаки задач цієї математичної структури та формулюють узагальнений план розв'язування.

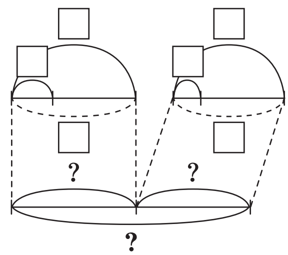
Істотні ознаки задач на знаходження суми двох добутків:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини одиниці виміру та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини одиниці виміру та кількості або часу;
3) шуканим є сума загальних значень величин для обох випадків.

ПАМ’ЯТКА

Задачі на знаходження суми двох добутків

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина	
I	□	□	1) ?	3) ?
II	□	□	2) ?	



План розв’язування

1. Знаходжу дією множення значення загальної величини в першому випадку.
2. Знаходжу дією множення значення загальної величини в другому випадку.
3. Знаходжу дією додавання суму загальних значень, відповідаю на запитання задачі.

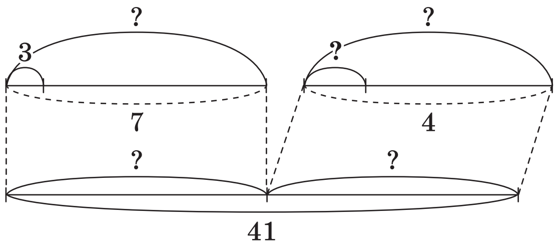
Далі учні застосовують узагальнений план розв’язування задач на знаходження суми двох добутків, а також *складають і розв’язують чотири обернені задачі* — дві на знаходження величини одиниці виміру (у першому та другому випадках) та дві — на знаходження кількості або часу (у першому та другому випадках).

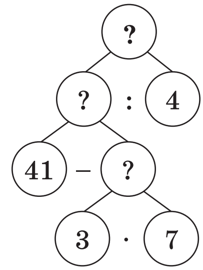
Пряма задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 грн та 4 ручки по 5 грн. Скільки грошей заплатив хлопчик за всю покупку?

Обернена задача 1. Хлопчик купив 7 олівців по 3 грн та 4 ручки. Яка ціна ручки, якщо за всю покупку хлопчик заплатив 41 грн?

Робота над задачею будується за пам’яткою «Працюю над складеною задачею».

	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)	
I	3	7	?	41
II	?	4	?	





Першою дією дізнаємося про вартість олівців. Другою дією дізнаємося про вартість ручок. Третьою дією дізнаємося про ціну ручки.

Обернена задача 2. Хлопчик купив 7 олівців та 4 ручки, по 5 грн за кожну ручку. Яка ціна олівця, якщо за всю покупку хлопчик заплатив 41 грн?

Складаємо короткий запис цієї задачі. На короткому записі показуємо прості задачі і розказуємо план розв'язування задачі.

	Ціна (грн)	Кількість (шт.)	Вартість (грн)
I	?	7	? } 41 —
II	5	4	?

Порівнявши обернені задачі 1 і 2, установлюємо, що в обох задачах шуканою є ціна, але в задачі 1 — ціна ручки, а в задачі 2 — ціна олівця. Тому першою дією дізнаємося про вартість олівців; другою дією дізнаємося про вартість ручок; а третьою дією відповімо на запитання задачі і дізнаємося про ціну олівця.

Далі учням пропонується розглянути таблицю і встановити, що змінилося, а що залишилося без змін; дослідити, як ця зміна вплине на розв'язання задачі.

	Продуктивність праці (шт. за 1 год)	Час роботи (год)	Загальний виробіток (шт.)
I	?	7	? } 41 —
II	5	4	?

Власне розв'язання не зміниться, але пояснення слід поправити. Загальний план розв'язування не змінюється.

Аналогічне завдання ставиться і до наступної таблиці.

	Продуктивність праці (шт. за 1 год)	Час роботи (год)	Загальний виробіток (шт.)
I	?	6	? } 70
II	8	5	?

План розв'язування задачі не змінюється, але слід змінити відповідні числові дані.

Порівнявши короткі записи та плани розв'язування обернених задач 1 і 2, учні визначають істотні ознаки задач, узагальнюють математичну структуру і план розв'язування задач, обернених до задач на знаходження суми двох добутків (шуканою є величина одиниці виміру).

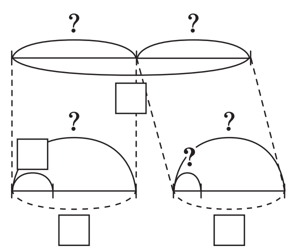
Істотні ознаки задач, обернених до задач на знаходження суми двох добутків (шуканою є величина одиниці виміру):

1) для одного з випадків дано значення двох величин: величини одиниці виміру та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано значення лише однієї величини — кількості або часу, а значення величини одиниці виміру є шуканим;
3) дано значення суми двох загальних величин.

ПАМ'ЯТКА

Задачі, обернені до задач на знаходження суми двох добутків (шуканою є величина одиниці виміру)

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина
I	□	□	1) ? } □
II	3) ?	□	2) ?



План розв'язування

1. Знаходжу дією множення значення загальної величини в одному з випадків.
2. Знаходжу дією віднімання значення загальної величини в іншому випадку.
3. Знаходжу дією ділення значення величини одиниці виміру, відповідаю на запитання задачі.

Аналогічно працюємо над наступними оберненими задачами.

Обернена задача 3. Хлопчик купив олівці, по 3 грн кожний, та 4 ручки, по 5 грн кожна. Скільки олівців купив хлопчик, якщо за всю покупку він заплатив 41 грн?

Обернена задача 4. Хлопчик купив 7 олівців, по 3 грн кожний, та ручки, по 5 грн кожна. Скільки ручок купив хлопчик, якщо за всю покупку він заплатив 41 грн?

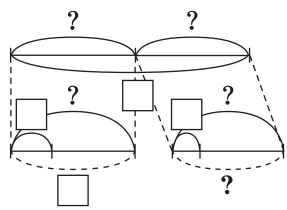
Істотні ознаки задач, обернених до задач на знаходження суми двох добутків (шуканою є кількість або час):

1) для одного з випадків дано значення двох величин: величини одиниці виміру та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення величини одиниці виміру, а кількість або час є шуканим;
3) дано значення суми двох загальних величин.

ПАМ'ЯТКА

Задачі, обернені до задач на знаходження суми двох добутків (шуканою є кількість або час)

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина	
I	□	□	1) ?	□
II	□	3) ?	2) ?	



План розв'язування

1. Знаходжу дією множення значення загальної величини в одному з випадків.
2. Знаходжу дією віднімання значення загальної величини в іншому випадку.
3. Знаходжу дією ділення значення величини кількості або часу, відповідаю на запитання задачі.

На наступному етапі шляхом порівняння між собою узагальненої математичної структури і плану розв'язування прямої та обернених задач можна узагальнити математичну структуру задач цього виду, визначити їхні істотні ознаки та сформулювати узагальнений план їх розв'язування.

Істотні ознаки задач на знаходження суми двох добутків та обернених до них задач:

1) для одного з випадків дано значення двох величин: величини одиниці виміру та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано або значення двох величин (величини одиниці виміру та кількості або часу), або однієї з них, тоді інша є шуканою;
3) сума значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження суми двох добутків та обернені до них задачі, де або *a*, або *b*, або *c*, або *k*, або *p* — шукане число

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина	
I	***a***	***b***	?	***p***
II	***c***	***k***	?	

План розв'язування

1. Знаходжу значення загальної величини в одному з випадків.
2. Знаходжу значення загальної величини в іншому випадку.
3. Відповідаю на запитання задачі.

Варто зазначити, що учням пропонуються узагальнені таблиці, істотні ознаки задач цієї математичної структури та узагальнені плани розв'язування задач у готовому вигляді; від учнів вимагається їх розглянути, звернути увагу на узагальнені формулювання. Таким чином реалізується етап попереднього ознайомлення з дією *визначення істотних ознак задачі* й *узагальнення її математичної структури* та *способу розв'язування* задач цієї математичної структури.

Засвоєння цих дій у матеріалізованій формі відбувається під час ознайомлення із задачами на різницеве або кратне порівняння двох добутків та оберненими до них задачами. Детальніше див. за посиланням.

Методику розв'язування задач на знаходження суми, на різницеве або кратне порівняння двох часток та обернених до них задач див. за посиланням.

4.2.2. Методика формування вміння розв'язувати задачі певних типів

У 3 класі учні вперше зустрічаються з типовими задачами: на знаходження четвертого пропорційного (поки що розв'язуються лише способом знаходження однакової величини); на подвійне зведення до одиниці та на спільну роботу. Працюючи над цими задачами, учні «впізнають» математичну структуру таких задач та актуалізують план їх розв'язування. Але якщо учень не може ідентифікувати задачу, а тому і не може пригадати план її розв'язування, робота над задачею здійснюється за пам'яткою «Працюю над складеною задачею».

4.2.2.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного

На етапі підготовчої роботи слід актуалізувати знання груп взаємопов'язаних величин та взаємозв'язків між взаємопов'язаними (пропорційними) величинами, уміння визначати в тексті задачі величини навіть тоді, коли вони задані неявно, зважаючи на найменування числових даних. Актуалізація зазначених знань і вмінь здійснюється під час розв'язування простих задач із взаємопов'язаними (пропорційними) величинами.

На етапі ознайомлення можна ввести задачі на знаходження четвертого пропорційного на основі розв'язування двох послідовних простих задач із пропорційними величинами і поєднання їх в одну складену задачу.

1. Розв'яжіть задачі.

1) Маса 6 однакових гусок становить 30 кг. Яка маса 1 гуски?
2) Маса гуски становить 5 кг. Яка маса 4 таких самих гусок?
3) Маса 6 однакових гусок становить 30 кг. Яка маса 4 таких самих гусок?

Учні порівнюють складену задачу 3 з двома попередніми простими задачами і визначають, що складена задача містить у собі прості задачі 1 і 2. Якщо після цього учні відразу можуть сформулювати план розв'язування задачі, то записуємо розв'язання, якщо ні, — виконуємо повний розбір задачі за пам'яткою «Працюю над складеною задачею».

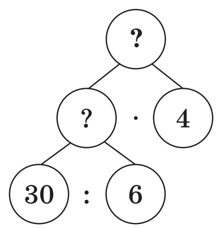
Розглянемо методику роботи над задачею.

Про що розповідається в складеній задачі? Які величини вона містить? Розгляньте короткий запис цієї задачі.

<table>
<tr><th></th><th>Маса 1 гуски (кг)</th><th>Кількість гусок (шт.)</th><th>Загальна маса гусок (кг)</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однакова</td><td>6</td><td>30</td></tr>
<tr><td>II</td><td>4</td><td>?</td></tr>
</table>

За таблицею поясніть числові дані задачі. Якій величині відповідає однакова величина? Яке запитання задачі? У відповіді ми одержимо більше чи менше число від 30? Чому? Повторіть запитання задачі. Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — масу однієї гуски (невідомо) та II — кількість гусок (відомо, 4 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Дією множення: щоб знайти загальну масу, треба масу однієї гуски помножити на кількість гусок.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Не можна, бо ми не знаємо масу однієї гуски.] Що сказано в задачі про масу однієї гуски в першому та другому випадках? [Маса однієї гуски і в першому, і в другому випадках однакова.] Що це означає? [Можна знайти масу однієї гуски в першому випадку.] Що потрібно знати, щоб знайти масу однієї гуски — однакову величину? [Потрібно знати два числові значення стосовно першого випадку: I — загальну масу гусок (відомо, 30 кг) та II — кількість гусок (відомо, 6 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Дією ділення: щоб знайти масу однієї гуски, потрібно загальну масу поділити на кількість гусок.] Чи можна на це запитання відповісти відразу? [Так.]

Розбийте складену задачу на прості, сформулюйте кожну просту задачу. Складіть план розв'язування задачі. Запишіть розв'язання.



[*Розв'язання:*

1) $30:6=5$ (кг) — маса однієї гуски, однакова величина;
2) $5 \cdot 4=20$ (кг) — загальна маса чотирьох гусок.]

Запишіть відповідь.

[*Відповідь:* 20 кг — загальна маса чотирьох гусок.]

Повернемося до нашого припущення. Чи правильно ми припустили, що у відповіді буде число, менше від 30? [Правильно.]

Детальніше про методику ознайомлення і формування в учнів уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного див. за посиланням.

З метою узагальнення способу розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та визначення істотних ознак задач цього виду можна запропонувати учням роботу з дослідження таких задач.

2. Розв'яжіть задачу.

Купили моркву і буряки за однаковою ціною. За 6 кг моркви заплатили 60 грн. Скільки коштують 4 кг буряків?

Робота над задачею йде за загальним планом. Після розв'язання задачі досліджуємо її. Пропонуємо учням *змінити величини задачі*, наприклад, на такі: «загальна маса», «маса одного предмета», «кількість предметів». Учні складають задачу, яка має таку саму математичну структуру, що й попередня. З'ясовуємо, як ця зміна вплине на розв'язання: розв'язання задачі не змінюється, треба лише змінити пояснення до арифметичних дій; запис виразу не змінюється.

Рекомендуємо *змінити числові дані задачі*. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них придатні. Діти впевнюються, що вони одержали задачу такої самої математичної структури, що й попередні. Досліджується вплив зміни, що сталася, на план розв'язування задачі. Учні доходять висновку, що від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

На підставі порівняння текстів задач та їхніх розв'язків учні встановлюють: у кожній задачі є два випадки; три величини, причому одна з них однакова для обох випадків; невідомим є загальне значення величини в одному з випадків. Ці задачі належать до одного виду — такі задачі називаються задачами на знаходження четвертого пропорційного. Вони містять чотири числові значення величин, які перебувають у пропорційній залежності, три з них дані, а четверте є шуканим. Першою дією (діленням) в таких задачах ми дізнаємося про однакову величину (величину одиниці виміру), бо не дізнавшись про неї, ми не зможемо відповісти на запитання задачі. Другою дією (множенням) у таких задачах ми відповідаємо на запитання задачі, дізнаємося про загальне значення величини.

Щоб перевірити правильність розв'язання прямої задачі, складаємо і розв'язуємо обернену задачу на знаходження кількості або часу.

> *Обернена задача 1.* 6 кг моркви коштують 60 грн. Скільки кілограмів буряків можна купити на 40 грн, якщо ціна моркви й буряків однакова?

Учні вносять зміни в розв'язання прямої задачі й одержують розв'язання оберненої задачі 1. Порівнявши короткі записи прямої та оберненої задачі 1, визначають спільні ознаки: в обох задачах є два випадки, обидві задачі містять три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно першого випадку дано значення двох величин, а стосовно другого випадку — лише однієї, а значення іншої величини є шуканим. Отже, обидві задачі містять чотири пропорційні числові значення, одне з яких є шуканим. Ці задачі називаються задачами на знаходження четвертого пропорційного. Відрізняються вони тим, що в прямій задачі шуканим було значення загальної величини, яку знаходять дією множення; а в оберненій задачі 1 шуканим є значення величини одиниці виміру, яку знаходять дією ділення. Учитель повідомляє, що цю відмінність і покладено в основу класифікації таких задач: задачі, у яких треба знайти *значення загальної величини дією множення*, — це *задачі першого підвиду*; а задачі, у яких *шукану величину знаходять дією ділення*, — це *задачі другого підвиду*. Отже, ми не лише перевірили правильність розв'язання прямої задачі, а й одержали задачу другого підвиду.

Далі порівнюються розв'язання прямої і оберненої задачі 1, визначається спільне: першою дією знаходимо значення однакової величини, другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Складаємо і розв'язуємо ще дві обернені задачі.

Обернена задача 2. Скільки коштують 6 кг моркви, якщо за 4 кг буряків заплатили 40 грн? (Морква і буряки продаються за однаковою ціною.)

Дослідження йде засобом *порівняння оберненої задачі 2 з прямою*: в обох задачах шуканим є значення загальної величини, але шуканими є різні значення загальної величини: у прямій задачі ми шукали загальне значення величини в другому випадку, а в оберненій задачі 2 — загальне значення величини в першому випадку. Ці задачі розв'язуються за одним і тим самим планом та одними й тими самими арифметичні діями, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними стосовно другого випадку, а в оберненій задачі 2 — за двома числовими значеннями величин стосовно першого випадку.

Обернена задача 3. Скільки кілограмів моркви можна купити на 60 грн, якщо на 40 грн можна купити 4 кг буряків? (Ціна моркви і буряків однакова.)

Порівнюємо обернені задачі 1 і 3. У цих задачах шуканою є кількість, але стосовно різних випадків. Щодо розв'язання, то в них однаковий план розв'язування та арифметичні дії, але однакову величину в оберненій задачі 1 знаходили за двома числовими даними величин першого випадку, а в оберненій задачі 3 — другого випадку.

Порівнюємо обернені задачі 2 і 3. У кожній задачі є три пропорційні величини, два випадки: стосовно другого випадку дано два числові значення, стосовно першого — лише одне, інше є шуканим. Порівнюємо розв'язання: у них однакові перші дії;

однакову величину в обох задачах знаходять за двома числовими даними, які стосуються другого випадку; відрізняються задачі другими діями — в оберненій задачі 2 остання дія множення, тому що знаходять загальну величину, а в оберненій задачі 3 — дія ділення, тому що знаходять кількість.

Подальше дослідження задачі може здійснюватися засобом *зміни однакової величини*. Детальніше див. за посиланням.

Слід зазначити, що традиційно ускладненими задачами на знаходження четвертого пропорційного вважають задачі, пов'язані з одиничною нормою, які за своєю математичною структурою є оберненими до задач на різницеве порівняння двох часток (величин одиниці виміру). Детальніше див. за посиланням.

4.2.2.2. Задачі на подвійне зведення до одиниці

Методика формування в молодших школярів умінь розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці передбачає ознайомлення учнів із двома математичними структурами цих задач: спрощеною, у якій дана або є шуканою величина подвійної одиниці (3 клас), та дещо ускладненою, у якій величина «подвійної одиниці» невідома, але не є шуканою (4 клас).

Одним зі способів розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного є спосіб зведення до одиниці — спосіб знаходження однакової величини. До ускладнених задач на знаходження четвертого пропорційного, у яких однаковою є величина однієї одиниці, належать задачі на подвійне зведення до одиниці. Спільною у цих задачах є наявність однакової величини, але в задачах на знаходження четвертого пропорційного це величина одиниці виміру або лічби, а в задачах на подвійне зведення до одиниці це «подвійна одиниця».

Тому на етапі підготовчої роботи розв'язуються задачі на знаходження четвертого пропорційного, які записують коротко у вигляді пропорції. Перевіркою правильності розв'язання є складання і розв'язування обернених задач.

Також на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі з пропорційними величинами на знаходження величини однієї одиниці, які містять зайве значення величини, що не входить до групи трьох пропорційних величин і є сталим, тому не впливає на розв'язання задачі. При розв'язуванні цих задач звертаємо увагу учнів саме на цю особливість і записуємо такі задачі коротко у вигляді пропорції двома способами — без зазначення зайвого числа та із його записом. Учні з'ясовують, що ця зміна не впливає на розв'язання задачі. Такі задачі є підготовчими до введення задач на подвійне зведення до одиниці.

Задачі нового виду вводяться на основі розв'язування двох послідовних простих задач на знаходження величини однієї одиниці, які містять зайве числове значення, що є сталим і для характеристики даних числових значень, і для характеристики шуканого числа. Наприклад, ці задачі містять величини: кількість овець, час, загальна маса сіна та величина, яка поєднує ці величини, — величина однієї одиниці — маса сіна на 1 день для всіх овець або маса сіна для однієї вівці на весь час. У першій задачі зайвим значенням (сталим) є кількість овець, а в другій — час.

1. Розв'яжіть задачі.
1) На 3 дні 6 вівцям дають 36 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають на 1 день 6 вівцям?
2) На 1 день 6 вівцям дають 12 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають на 1 день 1 вівці?

Ці дві задачі поєднуються в складену задачу, яка містить чотири величини: кількість овець, час, загальна маса сіна та величина, яка поєднує ці величини, — величина «подвійної одиниці» — маса сіна на 1 день для 1 вівці.

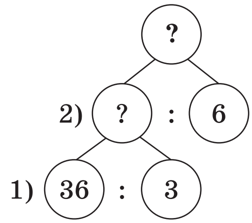
3) На 3 дні 6 вівцям дають 36 кг сіна. Скільки сіна дають на 1 день 1 вівці?

Учні порівнюють задачу 3 із задачею 1, установлюють, що спільною в цих задачах є умова, але вони мають різні запитання. Порівнюючи задачу 3 із задачею 2, учні доходять висновку, що спільними в них є запитання, але різні умови. Діти помічають, що задача 3 складається з двох попередніх простих задач. Це спостереження полегшує подальший аналітичний пошук розв'язування задачі.

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі: «Скільки кілограмів сіна дають на 1 день 1 вівці?» [Потрібно знати два числові значення: I — масу сіна на 1 день, яку дають усім вівцям (невідомо), та II — кількість овець (відомо, 6 шт.).]

Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Дією ділення.]

Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Не можна, бо ми не знаємо масу сіна на 1 день для 6 овець.] Що потрібно знати, щоб про це дізнатися? [Потрібно знати два числові значення: I — загальну



масу сіна (відомо, 36 кг) та II — час, протягом якого годували всіх тварин (відомо, 3 дні).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Діленням.] Чи можемо ми тепер відповісти на запитання задачі. [Так.] Ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.

Складіть план розв'язування задачі. [Першою дією ми дізнаємося про масу сіна на 1 день для 6 овець. Другою дією ми дізнаємося про масу сіна на 1 день для 1 вівці.]

Після розв'язування задачі ще раз пояснюємо, що ми знайшли першою дією, і показуємо це стрілочкою на короткому записі.

При розв'язуванні задач цього виду система стрілок та дужок грає роль опорних смислових пунктів для запам'ятовування способу розв'язування.

3 дні, 6 вів. — 36 кг
1 день, 1 вів. — ?

1) $36 : 3 = 12$ (кг) на 1 день 6 вівцям;
2) $12 : 6 = 2$ (кг) на 1 день 1 вівці.

Стрілка з дужкою позначає, що першою дією (поділивши 36 на 3) дізналися про масу сіна для 6 овець на 1 день. При розв'язуванні також застосовуємо стрілку, яка «наштовхує» на другу дію: ця стрілка позначає, що треба 12 поділити на 6, щоб дізнатися про величину «подвійної одиниці».

Задачі на подвійне зведення до одиниці передбачають два способи розв'язування. Засобом системи стрілок і дужок можна показати інший спосіб розв'язування.

3 дні, 6 вів. — 36 кг
1 день, 1 вів. — ?

Отже, першою дією (поділивши 36 на 6) дізнаємося про масу сіна для 1 вівці на 3 дні. Другою дією (поділивши одержане число на 3) дізнаємося про величину «подвійної одиниці».

Порівнюємо два способи розв'язування. Відмінним є те, що першою дією в першому способі ми дізналися про масу сіна на 1 день для 6 овець, а в другому — про масу сіна на 3 дні для 1 вівці. Спільним є те, що другою дією відповіли на запитання задачі — знайшли масу сіна для 1 вівці на 1 день.

Узагальнюємо перший та другий способи розв'язування:

- першою дією ми знайшли величину однієї одиниці для певної кількості або часу (або на 1 день для 6 овець, або на 3 дні для 1 вівці);
- другою дією ми знайшли величину однієї одиниці — на 1 день для 1 вівці — величину «подвійної одиниці».

Отже, у цій задачі ми двічі зводили до одиниці.

Учні *змінюють ситуацію задачі*. Припустимо, ідеться про витрату пального кількома тракторами. Учні складають задачу і доходять висновку, що в її розв'язуванні нема потреби, треба лише змінити пояснення. Отже, зміна величин задачі не впливає ні на перший, ні на другий способи розв'язування. Першою дією ми знайшли величину однієї одиниці (витрату пального або на 1 год для 6 тракторів, або на 3 год для 1 трактора). Другою дією ми також знайшли величину однієї одиниці — витрату пального на 1 год для 1 трактора. Таким чином, у цій задачі ми двічі зводили до одиниці.

Якщо зміна величин задачі не впливає на її розв'язування, то спробуємо дослідити, чи вплине на розв'язування задачі *зміна числових даних*. Отже, залишаємо тими самими величини, але змінюємо числові дані. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель їх дещо поправляє, щоб можна було виконати послідовне ділення числа на два інших.

Після проведеної роботи учні узагальнюють істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці, їх математичну структуру та способи розв'язування.

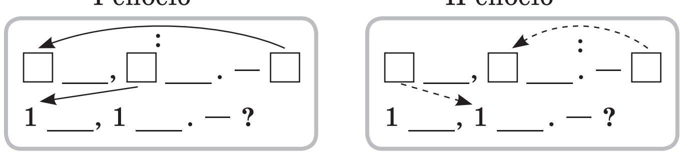
Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості або часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — «подвійна одиниця»;
2) загальне значення величини для даної кількості або часу;
3) шуканим є значення величини «подвійної одиниці».

ПАМ'ЯТКА

Задачі на подвійне зведення до одиниці

I спосіб　　　　　II спосіб



План розв'язування

1. Знаходжу дією ділення величину однієї одиниці для певної кількості або часу.
2. Знаходжу дією ділення «подвійну одиницю» та відповідаю на запитання задачі.

Пропонуємо учням розв'язати аналогічну задачу двома способами.

2. Розв'яжіть задачу.

У зоопарку за 3 дні 5 моржам дали 30 кг риби. Скільки кілограмів риби треба 1 моржу на 1 день?

Діти складають обернену задачу, у якій запитується про числове значення величини, яке було дано в умові прямої задачі.

Обернена задача. На 1 день 1 моржу дають 2 кг риби. Скільки кілограмів риби дадуть 5 моржам за 3 дні?

Порівнюємо цю задачу з попередньою і впевнюємося, що вони мають дуже схожі математичні структури. Обернена задача також містить чотири величини, але запитується не про величину «подвійної одиниці», а про значення загальної величини. Учні пробують застосувати два способи розв'язування задач аналогічної математичної структури.

Далі учні порівнюють розв'язання прямої та оберненої задач і встановлюють, що пряма задача розв'язується двома діями ділення, а обернена задача — двома діями множення. Учитель повідомляє, що цю ознаку покладено в основу класифікації задач на подвійне зведення до одиниці.

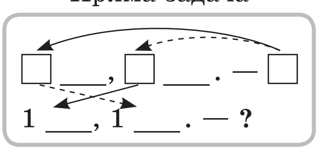
Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (прямої та оберненої):

1) подано чотири величини: кількість, час, загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує всі ці величини, — «подвійна одиниця»;
2) дано $\frac{\text{загальне значення для кількості та часу}}{\text{значення «подвійної одиниці»}}$;
3) шуканим є $\frac{\text{значення «подвійної одиниці»}}{\text{загальне значення для кількості та часу}}$.

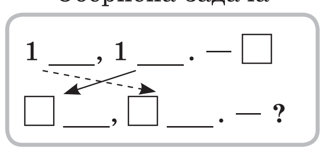
ПАМ'ЯТКА

Задачі на подвійне зведення до одиниці

Пряма задача



Обернена задача



План розв'язування

1) Знаходжу дією ділення (множення) величину однієї одиниці для певної кількості або часу.
2) Відповідаю на запитання задачі дією ділення (множення).

Подальша *зміна величин* та числових даних задачі не змінила її математичної структури і не вплинула на узагальнений план розв'язування. Отже, визначені вище істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці й узагальнений план розв'язування набули підтвердження.

Подальше дослідження задач на подвійне зведення до одиниці можна здійснити способом *складання і розв'язування інших обернених задач*.

3. Розв'яжіть задачу.

На 3 дні 8 коровам дають 48 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають на 1 день 1 корові?

Школярі складають короткий запис задачі, «впізнають» у цій задачі задачу на подвійне зведення до одиниці і роблять висновок, що ця задача розв'язується двома способами (ставлять стрілочки й дужки) і розповідають план розв'язування за кожним із цих способів.

Далі учні складають обернену задачу 1 на знаходження загальної величини для певної кількості або часу.

Обернена задача 1. На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають на 3 дні 8 коровам?

Робота над цією задачею проводиться аналогічно попередній. Після її розв'язання учні узагальнюють плани двох способів розв'язування прямої задачі та оберненої задачі 1. Дослідження задачі відбувається далі, і діти складають обернену задачу 2 на знаходження кількості.

Обернена задача 2. На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. Для скількох корів вистачить 48 кг сіна на 3 дні?

Виконавши зміни в короткому записі оберненої задачі 1, діти доходять висновку, що обернена задача 2 також містить «подвійну одиницю», тому вона належить до задач на подвійне зведення до одиниці. Згадуємо узагальнений спосіб розв'язування прямої задачі та оберненої задачі 1 і складаємо план розв'язування оберненої задачі 2 (першою дією дізнаємося про масу сіна для корів на 3 дні; другою дією відповідаємо на запитання задачі). Слід зазначити, що цю задачу можна розв'язати й іншим способом: першою дією дізнаємося про масу сіна для корів на 1 день; другою дією відповімо на запитання задачі.

Обернена задача 3. На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. На скільки днів вистачить 8 коровам 48 кг сіна?

Після розв'язання оберненої задачі 3 знову узагальнюємо істотні ознаки та план розв'язування всіх попередніх задач.

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) подано чотири величини: кількість, час, загальне значення для даної кількості та часу, а також величину, яка поєднує всі ці величини, «подвійну одиницю»;
2) дано три числових значення цих величин, шуканим є одне з числових значень: або величини «подвійної одиниці», або загальної величини, або кількості, або часу.

Треба зазначити, що цей елемент методики не є обов'язковим. Учитель пропонує учням складати і розв'язувати обернені задачі залежно від рівня підготовленості класу; математичні структури таких задач відсутні в більшості чинних підручників із математики для початкової школи.

Докладніше про методику навчання розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці див. за посиланням.

4.2.2.3. Задачі на спільну роботу

На етапі підготовчої роботи слід актуалізувати знання групи взаємопов'язаних величин: продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток — та взаємозв'язок між цими величинами. Це можна зробити під час розв'язування простих та складених задач, що містять цю групу величин.

Ключем до розв'язування задач на спільну роботу є знаходження продуктивності спільної праці двох виконавців. Тому на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі на знаходження спільної продуктивності. При цьому корисно ставити запитання: «Більше чи менше, ніж... (продуктивність одного виконавця) зроблять обидва виконавці, якщо працюватимуть разом?» або «Більше чи менше часу, ніж... (час роботи окремо одного з виконавців) витратять на працю обидва виконавці, якщо працюватимуть разом?»

Розв'яжіть задачі.

1) Батько може скопати рядок за 30 хв, а син — за 40 хв. Якщо вони працюватимуть разом, для того щоб скопати цей рядок, їм потрібно більше чи менше часу, ніж 30 хв? ніж 40 хв?
2) Одна операторка комп'ютерного набору за годину набирає 5 сторінок тексту, а інша — 4 сторінки. Скільки сторінок тексту наберуть за годину обидві операторки разом?

На етапі ознайомлення вводиться задача нової математичної структури, яка являє собою продовження попередньої задачі на знаходження спільної продуктивності праці (задача 2). У цій задачі треба знайти час, за який обидва виконавці виконають певний обсяг роботи.

3) Одна операторка комп'ютерного набору за годину набирає 5 сторінок тексту, а інша — 4 сторінки. За скільки годин вони наберуть 72 сторінки тексту, працюючи разом?

Порівнявши задачу 3 із задачею 2, учні встановлюють, що задача 3 є продовженням задачі 2, і досліджують, як ця зміна впливає на розв'язання задачі 3, — щоб відповісти на запитання цієї задачі, слід виконати ще одну арифметичну дію. Отже, першою арифметичною дією (додаванням) знайшли продуктивність спільної праці, а другою дією (діленням) знайшли час спільної праці і відповіли на запитання задачі. Учитель звертає увагу учнів на те, що в цій задачі запитується про час спільної праці двох виконавців, — це задача на спільну роботу. Учні визначають слова в тексті задачі, які вказують на те, що в ній ідеться про спільну роботу, — це слова «працюючи разом» або їх синоніми.

Зміна ситуації задачі 3 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі. У задачі 3 мова йшла про роботу двох операторок комп'ютерного набору (загальний виробіток — загальна кількість сторінок, продуктивність праці — кількість сторінок за 1 год, час роботи). Пропонуємо учням змінити ситуацію задачі. Припустимо, що працюватимуть два насоси (загальний виробіток — загальна маса води, продуктивність праці — маса води за 1 год, час роботи). Учні складають задачу і встановлюють, що це також задача на спільну роботу, у якій слід знайти час спільної роботи, причому ця зміна не впливає на розв'язання задачі, слід «підправити» тільки пояснення до арифметичних дій.

Зміна числових даних не впливає ні на математичну структуру задачі, ні на план її розв'язування. У записі розв'язання попередньої задачі слід змінити відповідні числа, а пояснення залишаться тими самими.

Узагальнюємо істотні ознаки, математичну структуру та план розв'язування задач на знаходження часу спільної роботи.

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три величини: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи;
2) три випадки: перший випадок стосується роботи першого виконавця, другий випадок стосується роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи обох виконавців;
3) до перших двох випадків дано продуктивність роботи кожного виконавця;

4) до третього випадку дано загальний виробіток, а час спільної роботи є шуканим.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на спільну роботу (шукане — час спільної роботи)

	Продуктивність праці	Час роботи	Загальний виробіток
I	$\square$		
II	$\square$		
I і II	?	?	$\square$

План розв'язування

1. Знаходжу дією додавання продуктивність спільної праці.
2. Знаходжу дією ділення час спільної роботи, відповідаю на запитання задачі.

Зміна шуканого задачі 3 і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язування. Учні складають обернену задачу на знаходження загального виробітку при спільній роботі (вносять зміни в короткий запис задачі 3).

Обернена задача 1. Одна операторка комп'ютерного набору за годину набирає 5 сторінок тексту, а інша — 4 сторінки. Скільки сторінок тексту вони наберуть за 8 год, якщо працюватимуть разом?

Школярі з'ясовують, що математична структура задачі майже не змінилася: задача містить ті самі величини, три випадки (до перших двох випадків дано продуктивність праці кожного виконавця, до третього випадку дано час роботи, а загальний виробіток є шуканим). Це також задача на спільну роботу, тому що запитується про загальний виробіток при спільній роботі. Учні згадують узагальнений план розв'язування задач на спільну роботу і встановлюють, що ця зміна вплине на останню дію — останньою дією буде множення, тому що знаходять загальний виробіток при спільній роботі.

Далі складаємо обернену задачу 2 на знаходження продуктивності першого виконавця (вносимо зміни в короткий запис оберненої задачі 1).

Обернена задача 2. Дві операторки комп'ютерного набору, працюючи разом, за 8 год набрали 72 сторінки тексту. Скільки сторінок тексту за 1 год набирає перша операторка комп'ютерного набору, якщо друга за 1 год набирає 4 сторінки тексту?

Одержуємо також задачу на спільну роботу: вона має ті самі істотні ознаки, що й попередні, але шуканою є продуктивність праці першого виконавця. Ця зміна впливає на розв'язування задачі так: першою дією так само знаходимо продуктивність спільної праці двох виконавців, але не за даними числовими значеннями продуктивності праці кожного виконавця, а за загальним виробітком при спільній праці та за часом спільної праці, дією ділення; другою дією відповідаємо на запитання задачі і знаходимо продуктивність праці першого виконавця дією віднімання.

Школярам пропонується скласти обернену задачу 3 на знаходження продуктивності праці другого виконавця і дослідити вплив цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язування.

Після цього узагальнюються істотні ознаки, математична структура задач на спільну роботу та план їх розв'язування.

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи двох виконавців;
3) дано продуктивність праці кожного виконавця, а шуканим є $\dfrac{\text{час спільної роботи}}{\text{загальний виробіток при спільній роботі}}$ або дано загальний виробіток та час при спільній роботі, а шуканим є продуктивність праці одного з виконавців.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на спільну роботу та обернені до них задачі

	Продуктивність праці	Час роботи	Загальний виробіток
I	$\square$/**?**		
II	$\square$/**?**		
I і II	1) ?	$\square$/**?**	$\square$/**?**

План розв'язування

1. Знаходжу продуктивність спільної роботи дією $\dfrac{\text{додавання}}{\text{ділення}}$.
2. Відповідаю на запитання задачі дією $\dfrac{\text{ділення або множення}}{\text{віднімання}}$.

Детальніше про методику навчання розв’язування задач на спільну роботу див. за посиланням.

4.3. ВИДИ ПРОСТИХ ЗАДАЧ У 4 КЛАСІ ТА МЕТОДИКА РОБОТИ НАД НИМИ

У 4 класі учні продовжують розв’язувати відомі їм види простих задач, тому їх слід узагальнити і систематизувати на початку навчального року. У 4 класі вводяться нові види простих задач:

1) задачі, які містять величини: швидкість, час і подоланий шлях;
2) задачі на знаходження площі прямокутника та обернені до них.

Також ми продовжуємо розв’язувати задачі на час, але вони дещо ускладнюються шляхом визначення дати початку або закінчення події, а не проміжку часу.

Навчання розв’язування простих задач нових видів є основою для навчання розв’язування складених задач, які містять ці види простих задач.

4.3.1. Прості задачі з величинами: швидкість, час і подоланий шлях

Задачі цього виду містять функціональний зв’язок між величинами: подоланий шлях, швидкість та час. У 3 класі були розглянуті задачі із взаємопов’язаними (пропорційними) величинами: вартість, ціна, кількість; загальна маса, маса одного предмета, кількість предметів; загальна довжина, довжина одного відрізу, кількість відрізів; загальна місткість, місткість однієї посудини, кількість посудин; загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи тощо. Прості задачі з величинами подоланий шлях, швидкість і час мають ту саму математичну структуру, що й будь-які інші прості задачі на знаходження однієї величини за відомими значеннями двох інших пов’язаних із нею величин. З цього випливає, що задачі з цими величинами можна розглядати, як і задачі з будь-якими іншими групами взаємопов’язаних величин, а також порівнювати їх із задачами з іншими групами величин.

Особливе місце в підготовчій роботі повинно займати розв’язування простих задач на функціональну залежність величин, зокрема задач на знаходження величини одиниці виміру. Під час розв’язування таких задач актуалізуємо знання про взаємозв’язок між пропорційними величинами.

На етапі підготовчої роботи в молодших школярів формується уявлення про швидкість як про шлях, що проходить тіло, яке рухається рівномірно, за одиницю часу. Діти вже знайомі з величинами: час та подоланий шлях. Чули вони й слово «швидкість». Але перед тим як перейти до розгляду залежності між подоланим шляхом, швидкістю та часом при рівномірному русі, треба ввести поняття «швидкість руху».

Спостерігаючи за рухом кількох тіл, учні помічають, що:

- за один і той самий час два тіла можуть подолати різний шлях;
- один і той самий шлях два тіла можуть подолати за різний час.

Чому так відбувається? Учні можуть відповісти, послуговуючись власним життєвим досвідом: «Тому що ці тіла рухаються з різною швидкістю!» Що таке швидкість? На це запитання учні навряд дадуть чітку відповідь...

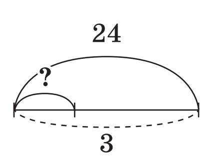
Поняття про швидкість вводиться на матеріалі задачі, яка розв'язується на основі конкретного змісту арифметичної дії ділення на рівні частини. Але спочатку пропонуємо допоміжну задачу з відомою групою взаємопов'язаних величин на знаходження продуктивності праці з тими самими числами.

1. Розв'яжіть задачі.

1) За 3 год операторка комп'ютерного набору набрала 24 сторінки тексту, набираючи однакову кількість сторінок кожної години. Скільки сторінок тексту набирала операторка за кожну годину?

Продуктивність праці (кількість сторінок за 1 год)	Час роботи (год)	Загальний виробіток (стор.)
?	3	24

Схематично проілюструємо задачу: накреслимо відрізок, який позначає загальний виробіток — 24 сторінки. Операторка набрала ці сторінки за 3 год, набираючи однакову кількість сторінок кожної години, тому відрізок, що позначає 24 сторінки, розділимо на 3 рівні частини; кожна з яких ілюструє кількість сторінок, які набирала операторка за 1 год (продуктивність праці).



Розв'язання:

24 : 3 = 8 (стор.)

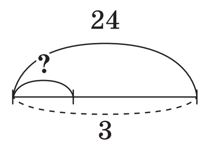
Відповідь: 8 сторінок тексту набирала операторка комп'ютерного набору за 1 год роботи.

2) За 3 год хлопчик проїхав на велосипеді 24 км, щогодини проїжджаючи однаковий шлях. Скільки кілометрів проїжджав хлопчик щогодини?

Учні порівнюють задачі 1 і 2 і встановлюють їх відмінність. Учитель пропонує виконати зміни в короткому записі і схематичному рисунку задачі 1.

Подоланий шлях за 1 годину (км)	Час руху (год)	Загальний подоланий шлях (км)
?	3	24

Розв'язання «нової» задачі не викликає в школярів труднощів, і вчитель повідомляє, що в цій задачі знайшли шлях, який подолало тіло за одиницю часу, тобто **швидкість руху тіла**. На основі аналізу розв'язання учні виводять правило знаходження швидкості руху тіла.



Щоб знайти швидкість руху тіла,
треба подоланий ним шлях поділити на час руху:

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{або} \quad v = s : t$$

Встановлюється, що швидкість — це величина одиниці виміру, і це правило вноситься до загального «банку» правил знаходження величини одиниці виміру.

Далі йде робота із закріплення фізичного змісту швидкості.

Варто поставити учням такі запитання. Що означає, що равлик повзе зі швидкістю 6 м/год? [Швидкість руху равлика 6 м/год означає, що за кожну годину равлик проповзає по 6 м.] Що означає, що літак летить зі швидкістю 950 км/год? [Швидкість літака 950 км/год означає, що за кожну годину літак пролітає по 950 км.]

Запитуємо, чому дорівнює швидкість руху: пішохода, якщо він проходить по 5 км за 1 год [5 км/год]; риби-меч, якщо вона щогодини пропливає по 100 км [100 км/год]; бджоли, якщо вона за кожну секунду пролітає по 7 м [7 м/с].

Для закріплення правила знаходження швидкості руху тіла розв'язуються сюжетні задачі на знаходження швидкості при рівномірному русі. Спочатку ці задачі містять два запитання, наприклад: «Скільки метрів долав бігун за одну секунду? З якою швидкістю він біг?», — а потім одне запитання.

Корисно розглянути *залежність швидкості руху від зміни подоланого шляху або часу*. Учням пропонуються пари задач, аналізуючи розв'язки яких школярі роблять відповідні висновки про прямо пропорційну залежність між швидкістю руху та подоланим шляхом (за незмінного часу) та обернено пропорційну залежність між швидкістю руху та часом за незмінного подоланого шляху. Наприклад, для усвідомлення залежності швидкості руху від зміни подоланого шляху учням пропонуються для порівняння пари задач.

2. Розв'яжіть задачі.

1) Пішохід за 4 год пройшов 20 км. Знайдіть швидкість руху пішохода.
2) Лижник за 4 год подолав 60 км. Знайдіть швидкість руху лижника.

Після розв'язання і порівняння цих двох задач пропонуємо учням відповісти запитання, чия швидкість руху більша [лижника]; чому швидкість руху лижника більша за швидкість руху пішохода [швидкість руху лижника більша, тому що він за один і той самий час, що й пішохід, подолав більший шлях]; який висновок можна зробити про залежність між швидкістю і подоланим шляхом [чим більша швидкість, тим більший шлях долає тіло за один і той самий час]. Отже, швидкість руху і подоланий шлях змінюється в однаковому напрямі, якщо час залишається сталим. Як зміниться подоланий шлях, якщо швидкість руху збільшиться? зменшиться? Як зміниться швидкість руху, якщо подоланий шлях збільшиться? зменшиться?

На матеріалі задачі, яка розв'язується на основі конкретного змісту арифметичної дії множення, вводиться правило знаходження подоланого шляху за відомими значеннями швидкості руху і часу, а правило знаходження часу — на основі задачі на конкретний зміст арифметичної дії ділення на вміщення. На основі аналізу розв'язань цих задач формулюються відповідні правила, які засвоюються при розв'язуванні спеціальних задач.

3. Розв'яжіть задачу.

Лижник був у дорозі 3 год, рухаючись рівномірно зі швидкістю 12 км/год. Який шлях подолав лижник?

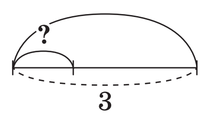
Розглянемо методику роботи над задачею.

Про що розповідається в задачі? [Про рух лижника. Відомо, що він рухався зі швидкістю 12 км/год. Це означає, що за кожну годину лижник долав по 12 км. Відомий час руху лижника — 3 год.] Який шлях подолав лижник за першу годину? [12 км] за другу годину? [12 км] за третю годину? [12 км]

Схематично проілюструємо задачу.

Запишемо задачу коротко у вигляді таблиці.

Швидкість (км/год)	Час руху (год)	Загальний подоланий шлях (км)
12	3	?



Якою арифметичною дією дізнаємося про загальний шлях, який подолав лижник за 3 год? [Дією множення: треба по 12 км взяти 3 рази.]

Розв'язання:

$12 \cdot 3 = 36$ (км).

Відповідь: 36 км подолав лижник за 3 год.

Звернемося до розв'язання задачі. Що позначає число 12? [Це швидкість руху лижника.] Що позначає число 3? [Це час руху.] Що ми знайшли в задачі? [Подоланий шлях.] Як ми знайшли подоланий шлях? [Ми швидкість помножили на час.] Зробіть висновок про те, як знайти подоланий шлях.

4. Розв'яжіть задачу.

Пасажир проїхав автобусом 180 км. Швидкість руху автобуса становить 60 км/год. Скільки часу їхав пасажир автобусом?

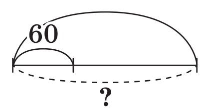
Розглянемо методику роботи над задачею.

Про що розповідається в задачі? [Про рух автобуса. Відомо, що автобус проїхав 180 км зі швидкістю 60 км/год. Це означає, що за кожну годину автобус проїжджав по 60 км. Треба знайти час руху.] Який шлях подолав автобус за першу годину? [60 км] Чи весь шлях він подолав? [Ні.] Який шлях подолав автобус за другу годину? [60 км] Чи весь шлях він подолав? [Ні.] Який шлях подолав автобус за третю годину? [60 км] Чи весь шлях він подолав? [Так.]

Отже, автобус витратив на рух стільки годин, скільки в 180 км міститься по 60 км.

Запишемо задачу коротко у вигляді таблиці.

Швидкість (км/год)	Час руху (год)	Загальний подоланий шлях (км)
60	?	180



Якою арифметичною дією дізнаємося про час руху автобуса? [Годин буде стільки, скільки разів у 180 км міститься по 60 км; щоб дізнатися про це, треба 180 км поділити на 60 км.]

Розв'язання:

$180:60=3$ — тому автобус був у дорозі 3 год.

Відповідь: 3 год пасажир їхав автобусом.

Звернемося до розв'язання задачі. Що позначає число 180? [Це шлях, який проїхав автобус.] Що позначає число 60? [Це швидкість руху автобуса.] Що ми знайшли в задачі? [Час.] Як ми знайшли час? [Ми подоланий шлях поділили на швидкість.] Зробіть висновок про те, як знайти час.

Під час формування вмінь розв'язувати задачі на знаходження подоланого шляху, швидкості руху й часу пропонуємо узагальнити спосіб одержання формули швидкості руху і часу з формули подоланого шляху на основі правила знаходження невідомого множника, який закріплюється при розв'язуванні трійок взаємно обернених задач.

Пропонуємо учням сформулювати формулу знаходження подоланого шляху.

Формула знаходження подоланого шляху

I множник		II множник		Добуток
Швидкість руху	·	Час	=	Подоланий шлях

Спираючись на записану формулу, записуємо, як знайти подоланий шлях; що в цьому записі є добутком; першим множником; другим множником. Пропонуємо учням сформулювати правило, як знайти перший множник — швидкість; як знайти другий множник — час.

Взаємозв'язок правил знаходження подоланого шляху, швидкості і часу

$$s=v\cdot t$$

$$v=s:t \qquad t=s:v$$

Після цього співвідносимо правила знаходження подоланого шляху, швидкості та часу з правилами знаходження інших груп взаємопов'язаних величин.

Функціональний зв'язок між величинами подоланий шлях, швидкість руху і час вводиться на основі порівняння пар задач, які відрізняються лише значенням однієї з трьох величин. Установивши відмінність цих задач і розв'язавши їх, діти визначають, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі, та роблять висновки про вид залежностей між двома величинами за незмінної третьої величини. Отже, при роботі над задачами з величинами подоланий шлях, швидкість руху і час ми продовжуємо формувати в молодших школярів у формі зовнішнього мовлення дії прикидки значення шуканої величини та встановлення відповідності шуканого числа області своїх значень.

Наприклад, розглянемо *зміну часу залежно від зміни швидкості руху за незмінного подоланого шляху*.

5. Розв'яжіть задачі.

1) За скільки годин проїде 720 км «Мерседес», якщо їхатиме зі швидкістю 180 км/год?
2) За скільки годин проїде 720 км «Лада», якщо їхатиме зі швидкістю 90 км/год?

Розглянемо методику роботи над задачею.

Порівняйте задачі. Що в них спільне? [Однаковий подоланий шлях — 720 км.] Чим вони відрізняються? [Різна швидкість: швидкість «Мерседеса» — 180 км/год, а швидкість «Лади» — 90 км/год.] Як ви вважаєте, яка машина витратить на дорогу менше часу? Чому? [Менше часу витратить «Мерседес», тому що один і той самий шлях (720 км) він долає з більшою швидкістю. Час і швидкість змінюються в протилежних напрямах!]

Розв'яжіть задачі і перевірте власне передбачення.

Порівняйте швидкості. У скільки разів швидкість руху «Мерседеса» більша? Порівняйте час руху. У скільки разів час руху «Мерседеса» менший? Який висновок можна зробити? [Якщо швидкість збільшити у 2 рази, то час, навпаки, зменшиться у 2 рази.] Як ви вважаєте, як зміниться час, якщо швидкість зменшити в 2 рази? [Час, навпаки, збільшиться у 2 рази.]

Докладніше про методику ознайомлення із задачами, які містять величини: швидкість, час і подоланий шлях, — див. за посиланням.

4.3.2. Задачі на час

Задачі на час містять три компоненти: дата початку події, тривалість події і дата закінчення події.

Короткий запис задач на час у вигляді таблиці

Дата початку події	Тривалість події	Дата закінчення події

Перед початком вивчення задач на час слід актуалізувати знання учнями одиниць вимірювання часу та співвідношення між ними; вміння замінювати одні одиниці вимірювання часу іншими; додавати і віднімати іменовані числа. Міркування при розв'язуванні задач на час здійснюються за правилами.

Щоб знайти тривалість події,
треба від часу закінчення події відняти час початку події.

Щоб знайти час закінчення події,
треба до часу початку події додати тривалість події.

Щоб знайти час початку події,
треба від часу закінчення події відняти тривалість події.

Певні труднощі викликають у дітей задачі такого типу.

1. Розв'яжіть задачу.

Екскурсія розпочалася 7 серпня о 10 год ранку, а закінчилася 15 серпня о 8 год вечора. Скільки часу тривала екскурсія?

Дата початку події	Тривалість події	Дата закінчення події
7 серпня 10 год ранку	?	15 серпня 8 год вечора

Розглянемо методику роботи над задачею.

Треба визначити, який проміжок часу відповідає даті 7 серпня 10 год ранку: від початку серпня до 7 числа пройшло 6 повних діб, 10 год ранку — це означає, що від початку доби пройшло 10 годин. Маємо: 6 діб 10 год.

Визначимо, який проміжок часу відповідає даті 15 серпня 8 год вечора: від початку серпня до 15 числа пройшло 14 повних діб, від початку доби до 8 год вечора пройшло 20 год. Маємо: 14 діб 20 год.

Дата початку події	Тривалість події	Дата закінчення події
7 серпня 10 год ранку 6 діб 10 год	?	15 серпня 8 год вечора 14 діб 20 год

Розв'язання

14 діб 20 год – 6 діб 10 год=8 діб 10 год

Відповідь: 8 діб 10 год тривала екскурсія.

2. Розв'яжіть задачу.

Перший у світі штучний супутник Землі запустили 4 жовтня 1957 року, а третій супутник — 15 травня 1958 року. Скільки часу минуло від запуску першого до запуску третього супутника?

Дата початку події	Тривалість події	Дата закінчення події
4 жовтня 1957 р.	?	15 травня 1958 р.

Треба визначити, який проміжок часу відповідає даті 4 жовтня 1957 р.: від початку літочислення до 1957 р. минуло 1956 повних років; від початку року до місяця жовтня минуло 9 повних місяців; від початку жовтня до 4 числа минуло 3 повні доби. Маємо: 1956 р. 9 міс. 3 доби.

Треба визначити, який проміжок часу відповідає даті 15 травня 1958 року: від початку літочислення до 1958 р. минуло 1957 повних років; від початку року до місяця травня минуло 4 повні місяці; від початку травня до 15 числа минуло 14 повних діб. Маємо: 1957 р. 4 міс. 14 діб.

Розв'язання:

    6   16
–1957 р. 4 міс. 14 діб
 <u>1956 р. 9 міс.   3 доби</u>
           7 міс. 11 діб

Відповідь: 7 місяців та 11 діб минуло від часу запуску першого супутника до часу запуску третього супутника.

Також пропонуються задачі на знаходження площі прямокутника і задачі на знаходження невідомої сторони за площею прямокутника та іншою стороною. Ці задачі ми розглянемо в розділі «Величини та їх вимірювання в курсі математики 4 класу».

4.4. ВИДИ СКЛАДЕНИХ ЗАДАЧ У 4 КЛАСІ ТА МЕТОДИКА РОБОТИ НАД НИМИ

У 3 класі учні розв'язували складені задачі, зокрема типові задачі — на знаходження четвертого пропорційного, на подвійне зведення до одиниці і на спільну роботу. На початку навчального року в 4 класі доцільно узагальнити й систематизувати знання учнів про задачі та процес їх розв'язування. Детальніше див. за посиланням.

4.4.1. Методика формування загального вміння розв'язувати складені задачі

У 3 класі ми сформували дію міркування від числових даних до запитання задачі — синтез — і почали формувати дії визначення істотних ознак задач та узагальнення їхньої математичної структури і способу розв'язування, які набули подальшого засвоєння під час роботи над задачами з пропорційними величинами в 3 класі. Отже, до 4 класу всі складові дії загального вміння розв'язувати складені задачі практично мають бути засвоєні, тому на цьому етапі зосереджено увагу на формуванні вміння розв'язувати задачі певних видів. Водночас на матеріалі задач, які містять дроби, і на матеріалі інших складених задач відбувається подальше вдосконалення загального вміння розв'язувати задачі.

Методику роботи над складеними задачами, які містять дроби, див. за посиланням.

4.4.2. Методика формування вміння розв'язувати задачі певних типів

4.4.2.1. Задачі, які містять однакову величину

У 3 класі учні ознайомились із задачами на знаходження четвертого пропорційного, які розв'язувалися способом знаходження однакової величини, та задачами на подвійне зведення до одиниці. У цих задачах ключем до розв'язування може бути знаходження значення однакової величини. Але це не єдині типи задач, які містять однакову величину. У 4 класі розширюється ця група задач шляхом введення задач на пропорційне ділення і задач на знаходження невідомих за двома різницями. У 4 класі учні вчаться розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень, і відтепер вони можуть розв'язувати такі задачі двома способами, за можливості. Розвиток вміння розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці відбувається шляхом ускладнення задач цього типу.

ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПРОПОРЦІЙНОГО

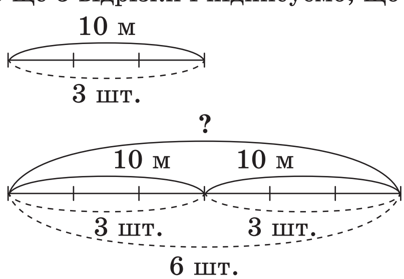
Ознайомлення зі способом відношень відбувається шляхом розв’язування задачі на знаходження четвертого пропорційного, у якій шуканим є значення загальної величини і однаковою є величина одиниці виміру, але яку не можна розв’язати способом знаходження значення однакової (сталої) величини, тому що не можна виконати ділення націло даних числових значень.

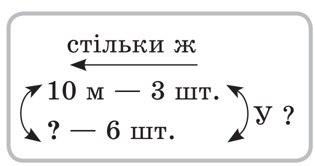
Розв’яжіть задачу.

З 10 м тканини кравчиня пошила 3 скатертини. Скільки метрів тканини потрібно на 6 таких скатертин?

Учні «впізнають» задачу на знаходження четвертого пропорційного, згадують узагальнений план розв’язування і пробують його застосувати... Виникає проблемна ситуація, яку допомагає розв’язати вчитель, пропонуючи зробити прикидку очікуваного результату, але не просто вказати, шукане є більшим чи меншим числом від даного, а встановити, у скільки разів воно більше чи менше від даного. Якщо учні не можуть зробити цей висновок, то вчитель радить виконати схематичний рисунок до задачі.

Позначивши кожну скатертину за одиничний відрізок, відраховуємо 3 відрізки і підписуємо зверху, що на них потрібно 10 м; нижче креслимо відрізок, який містить 6 одиничних відрізків, на ньому відраховуємо 3 відрізки і підписуємо, що на них потрібно 10 м, відраховуємо ще 3 відрізки і підписуємо, що на них потрібно 10 м.

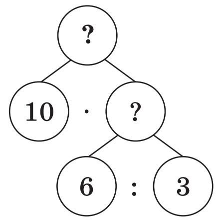




Шукане число буде в стільки разів більше за 10, у скільки разів 6 шт. більше ніж 3 шт.

Запитуємо учнів, що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі. [Потрібно знати два числові значення: I — скільки метрів тканини використали в першому випадку (відомо, 10 м) та II — у скільки разів більше використали тканини в другому випадку, ніж у першому (невідомо).]

Запитуємо, якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі [множенням]; чи можна відразу відповісти на запитання задачі [ні, тому що ми не знаємо, у скільки разів більше використали тканини в другому випадку, ніж у першому]. Запитуємо, що ми можемо сказати про те, у скільки разів більше використали тканини в другому випадку, ніж у першому. [Тканини використали в стільки разів більше, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому.] Просимо пояснити, що потрібно знати, щоб дізнатися, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому [потрібно знати два числові значення: I — скільки скатертин пошили в другому випадку (відомо, 6 шт.) та II — скільки скатертин пошили в першому випадку (відомо, 3 шт.)]; якою арифметичною дією відповімо на це запитання [діленням]. Запитуємо, чи можна відразу відповісти на це запитання. [Так, оскільки нам відомі обидва числові значення.] Ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.



Пропонуємо учням скласти план розв'язування задачі. [Першою дією (діленням) дізнаємося, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому. Робимо висновок: у стільки ж разів більше витратили тканини в другому випадку, ніж у першому. Другою дією (множенням) дізнаємося, скільки метрів тканини витратили в другому випадку.]

Запишемо розв'язання задачі по діях із поясненнями; запишемо відповідь.

Розв'язання:

1) $6:3=2$ — у стільки разів більше пошили скатертин, тому у стільки ж разів більше витратили тканини;
2) $10 \cdot 2=20$ (м) — стільки тканини витратили на 6 скатертин.

Або: $10 \cdot (6:3)=20$ (м).

Відповідь: 20 м тканини витратили на 6 скатертин.

Отже, в основі розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного способом відношень лежать такі міркування.

> Шукане число буде в стільки разів $\frac{\text{більше}}{\text{менше}}$ за дане числове значення цієї ж величини, у скільки разів відповідне йому числове значення іншої величини $\frac{\text{більше}}{\text{менше}}$ за друге значення цієї ж величини.

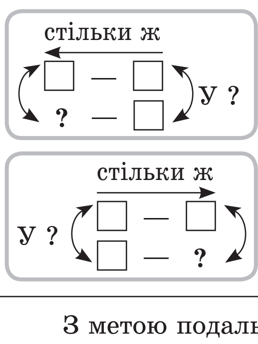
Учитель повідомляє, що цей спосіб розв'язування називається *способом відношень*. У математиці частку двох чисел інакше називають відношенням. Для відповіді на запитання задачі ми знаходили відношення двох даних числових значень певної величини й робили висновок, що в такому ж відношенні знаходиться шукане число з даним числовим значенням цієї ж величини. Спосіб відношень застосовується в тому випадку, коли не можна знайти значення однакової величини або коли можна дізнатися, як відносяться одне до одного два числові значення однієї величини.

З метою узагальнення способу розв'язування *змінюємо величини* та *числові дані* задачі і досліджуємо вплив цих змін на розв'язання задачі. Ці зміни не впливають на математичну структуру задачі: усі задачі — на знаходження четвертого пропорційного; ці зміни не впливають на план розв'язування задачі: першою дією (діленням) дізнаємося про відношення двох відомих чисел, які є значеннями однієї величини, і робимо висновок, що в такому самому відношенні знаходиться й інша пара числових значень другої величини; другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Після складання обернених задач радимо учням з'ясувати, як *зміна шуканого* задачі вплине на план її розв'язування, і лише потім виконати розв'язання. Порівнюємо обернену задачу з прямою; дві обернені задачі між собою: у задачах, у яких шуканими є числові значення однієї й тієї самої величини, але в різних випадках, звертаємо увагу на різний характер відношень — «у стільки разів більше», «у стільки разів менше». Порівнявши всі ці задачі, узагальнюємо план розв'язування.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень



План розв'язування

1. Визначаю кратне відношення двох числових даних щодо однієї з величин — у стільки ж разів шукане число більше (або менше), ніж подане числове дане іншої величини.
2. Відповідаю на запитання задачі.

З метою подальшого усвідомлення умов, при яких застосовується спосіб відношень, учні змінюють числове значення в задачі, яка розв'язується способом знаходження однакової величини, для того щоб можна було застосувати спосіб відношень.

Далі учням пропонується *порівняти два способи розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного*. Учні встановлюють, що ключем до розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного першим способом було знаходження однакової величини, а в другому способі розв'язування ключем є числове значення і характер відношення двох відомих числових даних однієї з величин та висновок про таке саме відношення шуканого числа і відомого числового значення. Для знаходження однакової величини ми користувалися двома числовими даними різних величин стосовно одного з випадків, а для знаходження числового значення відношення ми користувалися двома числовими даними однієї й тієї самої величини.

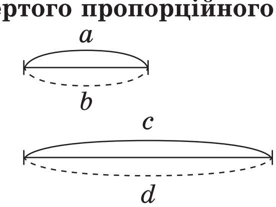
Дослідження можливості застосування способу відношень для розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, у яких однаковим є значення загальної величини, або кількості, або часу, відбувається засобом зміни числових даних у задачах. Робота виконується аналогічно. Учні доходять висновку, що *зміна однакової величини* не впливає на план розв'язування задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень.

Далі можна узагальнити можливі способи розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

a — b
c — d



де шуканим є
або a, або b, або c, або d.

Спосіб знаходження однакової величини

План розв'язування

1. Знаходжу значення однакової величини за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків.
2. Відповідаю на запитання задачі.

Спосіб відношень

План розв'язування

1. Визначаю кратне відношення двох числових даних однієї з величин — у стільки ж разів шукане число більше (або менше), ніж подане числове дане іншої величини.
2. Відповідаю на запитання задачі.

Учні *розв'язують задачі двома способами і досліджують умови можливості застосовування* кожного з них. Спосіб знаходження однакової величини не можна застосувати в тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло числових даних двох величин стосовно одного з випадків. Спосіб відношень не можна застосувати в тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло двох числових даних однієї величини.

На етапі закріплення вміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного учні аналізують математичну структуру задачі, «впізнають» її, згадують узагальнений план розв'язування і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити розв'язанню задач двома способами: способом знаходження однакової величини та способом відношень; складанню і розв'язуванню обернених задач — перетворенню задачі одного підвиду на задачу іншого підвиду. На цьому етапі пропонуємо учням задачі на знаходження четвертого пропорційного, у яких однаковою величиною є загальна величина або кількість чи час.

Детальніше про навчання розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного див. за посиланням.

ЗАДАЧІ НА ПРОПОРЦІЙНЕ ДІЛЕННЯ

Мета підготовчої роботи до введення задач на пропорційне ділення полягає в актуалізації знань, умінь та навичок, які необхідні при розв'язуванні задач на пропорційне ділення, а саме:
- знання взаємозв'язку між основними групами величин, які знаходяться в пропорційній залежності;
- уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини: аналізуючи умову задачі, виділяти однакову величину; складати короткий запис задачі у вигляді таблиці; під час проведення пошуку розв'язування задачі усвідомлювати, що для відповіді на запитання задачі треба знайти значення однакової величини, про яке можна дізнатися за даними числовими значеннями двох величин стосовно іншого випадку.

Усі перелічені знання та вміння актуалізуються під час розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини.

Розв'язування задач нового виду — на пропорційне ділення — базується на чіткому вмінні розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, тому що обидва види задач розв'язуються способом знаходження однакової величини. Але в задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходимо за двома відомими величинами одного з випадків, про які йде мова в задачі. У задачах на пропорційне ділення нам не дані числові значення обох величин щодо якогось випадку, за якими можна дізнатися про однакову величину. У цих задачах однакову величину ми знаходимо за значеннями сум двох інших величин (за двома сумами), причому значення першої суми вже дано за умовою задачі, а значення другої суми слід знайти за даними значеннями кожного з випадків, про які йде мова в задачі. Тому на етапі підготовчої роботи учням пропонують спеціальні завдання на знаходження однакової величини за двома сумарними значеннями двох інших величин.

1. Розв'яжіть задачу.

В одному класі 12 учнів, а в іншому — 15 учнів. Усього в учнів обох класів 135 підручників. Скільки підручників в одного учня, якщо кожен учень цих класів має однакову кількість підручників?

На етапі ознайомлення із задачами на пропорційне ділення учні розв'язують задачу на знаходження четвертого пропорційного, у якій шуканим є значення загальної величини й однаковою (сталою) є величина одиниці виміру, способом знаходження однакової (сталої) величини.

2. Розв'яжіть задачу.

Першого дня на базу привезли 2 вагони вугілля, маса якого становить 38 т. Другого дня привезли 3 таких самих вагони вугілля. Скільки тонн вугілля привезли другого дня?

Після розв'язання цієї задачі вчитель пропонує учням знайти сумарне значення загальної величини і включити його в задачу, при цьому змінити вимогу — знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного перетворюється на короткий запис нової задачі. За коротким записом складається задача на пропорційне ділення, у якій однаковою є величина одиниці виміру.

За два дні на базу привезли 95 т вугілля. Першого дня привезли 2 вагони, а другого дня — 3 вагони. Скільки тонн вугілля привезли кожного дня, якщо маса 1 вагона була однаковою?

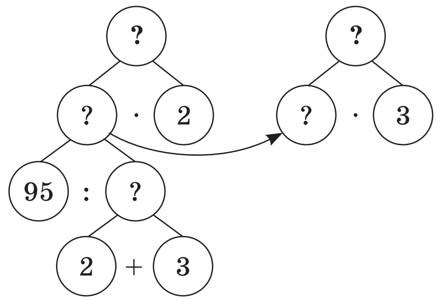
Учитель повідомляє, що це задача нового виду — на пропорційне ділення. Він зауважує, що в задачах цього виду запитання містить слово «кожен», тому воно розпадається на два запитання. А якщо в задачі два запитання, то одержимо і дві відповіді. Подальша робота над задачею йде за загальним планом.

За коротким записом поясніть числові дані задачі. Що позначає однакова величина? [Число 2 позначає кількість вагонів із вугіллям, які привезли першого дня. Число 3 позначає кількість вагонів із вугіллям, які привезли другого дня. Число 95 позначає загальну масу вугілля, яке привезли за обидва дні. Однакова величина позначає, що маса 1 вагона вугілля однакова і першого, і другого дня, тобто кожен вагон уміщує однакову кількість тонн вугілля.] Яке запитання задачі? [Скільки тонн вугілля привезли кожного дня?] На які два запитання воно розпадається? [1. Скільки тонн вугілля привезли першого дня? 2. Скільки тонн вугілля привезли другого дня?] Чи можливо відразу відповісти на два запитання? [Ні, неможливо.] Тому відповімо спочатку на перше запитання, а потім — на друге запитання. Зробимо припущення щодо числових значень шуканої величини. При однаковій масі 1 вагона першого дня привезли меншу кількість вагонів вугілля, ніж другого дня, тому й загальна маса вугілля, яке привезли першого дня, буде меншою, ніж загальна маса вугілля, яке привезли другого дня. При однаковій масі 1 вагона загальна маса і кількість змінюються в одному напрямку. Подумайте, що потрібно знати, щоб відповісти на перше запитання задачі: «Скільки тонн вугілля привезли на базу першого дня?» [Потрібно знати два числових значення: I — масу одного вагона (невідомо) та II — скільки вагонів вугілля привезли першого дня (відомо, 2 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на перше запитання задачі? [Множенням, оскільки щоб знайти загальну масу, треба масу одного вагона помножити на кількість вагонів.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Ні, не можна, тому що ми не знаємо однакову величину — масу одного вагона.] Що потрібно знати, щоб знайти однакову величину — масу одного вагона? [Потрібно знати два числових значення: I — загальну масу вугілля, яку привезли за обидва дні (відомо, 95 т) та II — загальне значення кількості вагонів (невідомо).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Діленням, оскільки щоб знайти масу одного вагона, треба загальну масу поділити на загальну кількість вагонів.] Чи можна відповісти на це запитання відразу? [Ні, не можна, тому що ми не знаємо загальне значення кількості вагонів.] Що потрібно знати, щоб знайти загальне значення кількості вагонів? [Потрібно знати два числових значення: I — кількість вагонів, які привезли першого дня (відомо, 2 шт.) та II — кількість вагонів, які привезли другого дня (відомо, 3 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Додаванням.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Можна, тому що нам відомі обидва числові значення.] Чи на всі запитання задачі ми відповіли? Що достатньо знати, щоб відповісти на друге запитання задачі? [Достатньо знати два числових значення: I — масу одного вагона (ми її знайдемо, коли будемо відповідати на перше запитання задачі) та II — кількість вагонів, які привезли другого дня (відомо, 3 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Множенням.]

Складемо план розв'язування задачі. [Першою дією (додаванням) дізнаємося про загальну кількість вагонів із вугіллям, які привезли за два дні. Другою дією (діленням) дізнаємося про значення однакової величини, тобто про масу вугілля в одному вагоні. Третьою дією дізнаємося про масу вугілля, яке привезли першого дня. Четвертою дією дізнаємося про масу вугілля, яке привезли другого дня.]

Розв'язання:

1) 2 + 3 = 5 (ваг.) — усього привезли за два дні.
2) 95 : 5 = 19 (т) — маса 1 вагона.
3) 19 · 2 = 38 (т) — привезли першого дня.
4) 19 · 3 = 57 (т) — привезли другого дня.



Відповідь: 38 т вугілля привезли першого дня, 57 т вугілля привезли другого дня.

Після розв'язання задачі перевіряємо правильність зробленого припущення. Учні підтверджують, що першого дня привезли 38 т вугілля, що менше, ніж 57 т вугілля, яке привезли другого дня.

Перевірка розв'язання здійснюється засобом додавання знайдених числових значень і порівняння одержаного числа з даним числовим значенням суми.

Далі *порівнюємо задачі на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення* з метою дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання. Задачу на пропорційне ділення ми одержали шляхом перетворення задачі на знаходження четвертого пропорційного. У задачі на знаходження четвертого пропорційного ми виконали такі зміни: шуканими стали два числові значення однієї величини (загальної величини), але ми задали їхню суму.

Отже, припускаємо, що істотні ознаки задач на пропорційне ділення такі:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
4) стосовно однієї величини дано два числові значення для обох випадків;
5) стосовно іншої величини два числові значення є шуканими, але дано їхню суму.

З'ясовуємо, як *зміна умови* вплинула на розв'язання задачі. При розв'язуванні задач на пропорційне ділення ми не можемо однакову величину знаходити за двома відомими величинами одного з випадків, однакову величину ми знаходимо за двома сумарними значеннями двох величин. Отже, зміна умови задачі вплинула на спосіб знаходження однакової величини.

Визначаємо спільне в розв'язуванні задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення: для розв'язання обох задач треба знайти значення однакової величини.

Узагальнюємо математичні структури та плани розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення (шукане — значення загальної величини)

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

<table>
<tr><th></th><th>Величина одиниці</th><th>Кількість або час</th><th>Загальна величина</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однак.</td><td>□</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td></tr>
</table>

План розв'язування

1. Знаходжу значення однакової величини за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків.
2. Відповідаю на запитання задачі.

Задачі на пропорційне ділення

<table>
<tr><th></th><th>Величина одиниці</th><th>Кількість або час</th><th>Загальна величина</th><th></th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однак.</td><td>□</td><td>?</td><td rowspan="2">} □</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td></tr>
</table>

План розв'язування

1. Знаходжу дією додавання суму даних числових значень однієї з величин — кількості або часу (другу суму).
2. Знаходжу дією ділення сум двох інших величин значення однакової величини — величину однієї одиниці.
3. Знаходжу дією множення шукане значення загальної величини, відповідаю на перше запитання задачі.
4. Знаходжу дією множення шукане значення загальної величини у другому випадку, відповідаю на друге запитання задачі.

Способи знаходження однакової величини:

1) за двома числовими значеннями двох величин стосовно одного з випадків;
2) за двома сумарними значеннями двох величин.

Подальше дослідження задач на пропорційне ділення здійснюється за допомогою *зміни величин* або *числових даних* задачі і дослідження впливу цих змін на розв'язання задачі. Робота йде аналогічно, як при навчанні розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні доходять висновку, що зміна величин у задачі або зміна числових даних не вплинула на математичну структуру задачі, — вона залишилася тією самою; щодо розв'язання задачі, то залишилися ті самі арифметичні дії та їхній порядок, тобто не змінився план розв'язування задачі.

Отже, дослідження задачі підтвердило наявність визначених істотних ознак задач на пропорційне ділення, які були припущені при зіставленні задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження четвертого пропорційного. Крім того, зміна величин або числових даних задачі не вплинула на план її розв'язування, він лишився тим самим.

Подальше дослідження задачі здійснюється за допомогою *зміни шуканих задачі*. У задачі на пропорційне ділення відбуваються такі зміни: значення кількості або часу для обох випадків стають шуканими, але дано їх суму; значення загальної величини відомі для обох випадків. Ці зміни позначаються на короткому записі задачі. Учні складають задачу за коротким записом.

За два дні на базу привезли 5 вагонів вугілля. Першого дня привезли 38 т вугілля, а другого дня — 57 т вугілля. Скільки вагонів вугілля привезли кожного дня, якщо маса 1 вагона була однаковою?

Далі аналізується математична структура задачі: ця задача також містить два випадки; три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дано два числові значення, а стосовно іншої — сумарне значення, а числові значення окремо для першого і для другого випадку є шуканими. Задача також містить два запитання. Це задача того ж самого виду — на пропорційне ділення.

Згадуємо, за яким планом розв'язуються задачі на пропорційне ділення, і дещо його поправляємо. Після розв'язування задачі порівнюємо розв'язання обох задач: спільні дві перші дії — перша дія додавання, а друга дія ділення; відрізняються дві останні дії — у задачі на пропорційне ділення, у якій шуканим є значення загальної величини, останні дві дії множення, а в задачі, у якій шуканим є кількість або час, дві останні дії ділення. Для того щоб відрізняти ці задачі, домовилися вважати задачі, у яких дві останні дії множення, задачами першого підвиду, а задачі, у яких дві останні дії ділення, — задачами другого підвиду.

Порівнявши задачі на пропорційне ділення, у яких шуканим є значення загальної величини, та задачі, у яких шуканим є кількість або час, учні доходять висновку про те, що для того щоб перетворити задачу одного підвиду на задачу іншого підвиду, потрібно:

- замінити шукані величини їхніми числовими значеннями, виключити їхнє сумарне значення;
- обидва числові дані іншої величини вважати шуканими, але задати їхнє сумарне значення.

Зміна величин або числових даних задачі і дослідження впливу цих змін на розв'язування задачі.

Виконавши зміну величин задачі, учні впевнюються, що ця зміна не вплинула на розв'язання задачі: розв'язання залишилося тим самим, але слід змінити пояснення.

Зміна числових даних задачі також не вплинула на план розв'язування: арифметичні дії та їхній порядок залишився тим самим.

Після проведеної роботи існує можливість узагальнити істотні ознаки, математичну структуру та план розв'язування задач на пропорційне ділення.

Істотні ознаки задач на пропорційне ділення, у яких однаковою є величина однієї одиниці вимірювання або лічби:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки:
3) значення величини однієї одиниці є однаковим для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числові значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їхнє сумарне значення.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на пропорційне ділення (однакове — величина одиниці виміру або лічби)

<table>
<tr><th></th><th>Величина одиниці</th><th>Кількість або час</th><th>Загальна величина</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однак.</td><td>□</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}?\\?\end{matrix}\right\}\square$</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Величина одиниці</th><th>Кількість або час</th><th>Загальна величина</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однак.</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}?\\?\end{matrix}\right\}\square$</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td></tr>
</table>

План розв'язування

1. Знаходжу суму поданих числових значень однієї з величин.
2. Знаходжу значення однакової величини — величини однієї одиниці — за сумами двох інших величин.
3. Відповідаю на перше запитання задачі.
4. Відповідаю на друге запитання задачі.

Отже, якщо в задачі *шуканими є значення загальної величини*, то вона належить до задач *першого підвиду*, а якщо *кількості або часу*, то маємо задачу *другого підвиду*. Задачі на знаходження четвертого пропорційного також поділяються на задачі першого та другого підвиду за цією ознакою. Тому існує можливість порівняти всі види задач на знаходження четвертого пропорційного та задач на пропорційне ділення. У цих задачах спільними є два випадки, три пропорційні величини й одна величина є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин дано два числові значення. У задачах на знаходження четвертого пропорційного щодо іншої величини дано одне числове значення, а друге є шуканим; а в задачах на пропорційне ділення для іншої величини дано лише сумарне значення, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. У задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на пропорційне ділення — два.

Порівнюємо розв'язання відповідних *задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення*. Вони відрізняються кількістю дій: задачі на знаходження четвертого пропорційного розв'язуються двома діями, а задачі на пропорційне ділення — чотирма діями. Вони відрізняються способом знаходження однакової величини: у задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за двома відомими числовими даними двох величин стосовно одного з випадків, у задачах на пропорційне ділення — за двома сумарними значеннями двох величин. Значення однакової величини в задачах на знаходження четвертого пропорційного знаходять першою дією, а в задачах на пропорційне ділення — другою, тому що першою дією слід відшукати значення другої суми.

Більш докладно про навчання розв'язування задач на пропорційне ділення див. за посиланням.

Подальше дослідження задач на пропорційне ділення за допомогою зміни однакової величини див. за посиланням.

ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВІДОМОГО ЗА ДВОМА РІЗНИЦЯМИ

На етапі підготовчої роботи пропонуємо учням розв'язати задачу на знаходження четвертого пропорційного. Після розв'язання задачі перетворюємо її на задачу на пропорційне ділення; розв'язуємо одержану задачу та порівнюємо умови і розв'язання цих двох задач; робимо узагальнення.

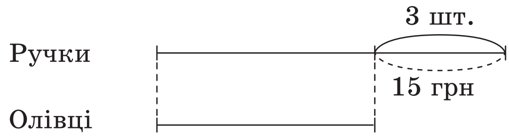
> Якщо в задачі є однакова для обох випадків величина, то для відповіді на запитання задачі потрібно знати значення однакової величини. Однакову величину знаходять:
> а) за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків;
> б) за значеннями сум двох інших величин для обох випадків разом.

Зазначимо, що цей висновок ми застосовуватимемо і при ознайомленні із задачами на знаходження невідомого за двома різницями, але в цьому випадку значення однакової величини ми будемо шукати іншим шляхом — за двома різницями.

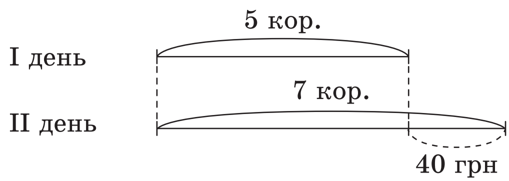
Мета підготовчої роботи полягає в розв'язуванні спеціальних задач, за допомогою яких усвідомлюється значення другої різниці.

1. Розв'яжіть задачі.

1) Для школяра купили за однаковою ціною канцтовари: ручки та олівці. Ручок купили на 3 більше, ніж олівців, і заплатили за них на 15 грн більше. Яка ціна ручки та яка ціна олівця?



2) Першого дня купили 5 коробок кольорових олівців, а другого дня — ще 7 таких самих коробок кольорових олівців і заплатили за них на 40 грн більше. Скільки коштує одна коробка кольорових олівців?



З метою формування в школярів уміння знаходити значення однакової величини за двома різницями значень величин стосовно двох випадків, слід пропонувати учням певну кількість задач розглянутого виду. Розв'язки цих задач можна узагальнити, зробивши висновок.

> Однакову величину можна знайти за значеннями різниць інших величин стосовно двох випадків.

2. Розв'яжіть задачу.

До першого магазину завезли 5 однакових сувоїв тканини, а до другого — 3 таких сувої. До першого магазину завезли на 180 м тканини більше, ніж до другого. Скільки метрів тканини в 1 сувої?

Наводимо методику роботи над задачею.

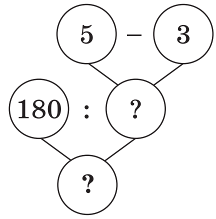
Про що йдеться в задачі? [У задачі йдеться про сувої тканини, які завезли до двох магазинів.] Які сувої тканини завезли до магазинів? [Однакові.] Що це означає? [«Однакові сувої» означає, що це однакова тканина і в одному сувої однакова кількість метрів цієї тканини.] Отже, під однаковими сувоями ми розуміємо сувої, у яких міститься однакова кількість метрів тканини. Про які величини йде мова в задачі? [Кількість сувоїв, довжина тканини в одному сувої, загальна довжина тканини.] Які ще ключові слова можна виділити? [Перший магазин, другий магазин.] Запишемо задачу коротко у вигляді таблиці.

	Довжина тканини в одному сувої (м)	Кількість сувоїв (шт.)	Загальна довжина тканини (м)
Перший магазин	?, однакова	5	на 180 м б.
Другий магазин		3	

За коротким записом учні пояснюють числові дані задачі і що означає однакова величина; називають запитання задачі та з'ясовують, як пов'язана однакова величина — довжина тканини в одному сувої — з іншими величинами.

Наводимо методику подальшої роботи над цією задачею.

До якого магазину привезли більше метрів тканини? [До першого магазину.] Чому? [Тому що до першого магазину привезли більше сувоїв тканини, ніж до другого.] На скільки більше метрів тканини привезли до першого магазину, ніж до другого? [На 180 м тканини більше.] Що це означає? [Це означає, що до першого магазину привезли тканини стільки ж, скільки й до другого, та ще 180 м.] Скільки сувоїв тканини, які привезли до першого магазину, вміщують стільки метрів тканини, скільки метрів тканини привезли до другого магазину? [3 сувої.] Але ж до першого магазину привезли більше, ніж 3 сувої тканини. Скільки метрів тканини вміщує решта сувоїв, які привезли до першого магазину? [180 м.] Це перша різниця. Чи можливо дізнатися, скільки сувоїв тканини вміщують 180 м? Це і є друга різниця. Знаючи, що до першого магазину привезли 5 сувоїв тканини і що до другого магазину привезли 3 таких сувої, про що можна дізнатися за цими числовими даними? [Можна дізнатися, на скільки більше сувоїв тканини привезли до першого магазину, ніж до другого; або можна дізнатися про різницю кількості сувоїв тканини, які привезли до першого та другого магазинів.] Якою арифметичною дією дізнаємося про це? [Відніманням.]



Знаючи, на скільки більше метрів тканини привезли до першого магазину, ніж до другого (на 180 м), і знаючи, на скільки більше сувоїв тканини привезли до першого магазину, ніж до другого, про що ми можемо дізнатися? Або можна сказати так: знаючи різницю загальної довжини тканини і знаючи різницю кількості сувоїв тканини, про що можна дізнатися за цими числовими даними? [Можна дізнатися про довжину тканини в одному сувої, про однакову величину.] Якою арифметичною дією дізнаємося про це? [Діленням.]

Далі учні складають план розв'язування задачі, записують розв'язання і відповідь. Під час розв'язування аналогічних задач у школярів повинно скластися таке уявлення: якщо в задачі не задано обидві різниці, одну з них слід визначити і лише потім знайти значення однакової величини. Уміння визначати другу різницю, а потім за двома різницями знаходити однакову величину є складовою частиною вміння розв'язувати задачі на знаходження невідомого за двома різницями. Тому воно повинно бути засвоєним як самостійна дія засобом виконання певної кількості завдань і узагальнення способу розв'язування.

Однакову величину знаходять:

а) за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків;
б) за значеннями двох сум інших величин для обох випадків разом (за двома сумами);
в) за значеннями різниць двох інших величин стосовно двох випадків (за двома різницями).

На етапі ознайомлення із задачами на знаходження невідомих за двома різницями пропонуємо учням розв'язати задачу.

3. Розв'яжіть задачу.

У кіоску продали за однаковою ціною 12 синіх та 8 чорних ручок. За всі ручки одержали 160 грн. Скільки грошей одержали за кожний вид ручок?

Перед розв'язанням задачі школярі роблять прикидку очікуваних результатів, а після її розв'язання вчитель пропонує дізнатися, на скільки більше чи менше одне значення шуканого — загальної величини — за інше, тобто величину їхнього різницевого відношення. Знайдене число включається в наступну задачу. Отже, сума загальних величин замінюється їхньою різницею. Таким чином одержуємо задачу на знаходження невідомих за двома різницями. Усі зміни спочатку виконуємо на короткому записі, а потім складаємо задачу.

У кіоску продали за однаковою ціною 12 синіх та 8 чорних ручок. За сині ручки заплатили на 32 грн більше, ніж за чорні. Скільки грошей одержали за кожний вид ручок?

Перед розв'язанням задачі учні порівнюють задачу нового виду із задачею на пропорційне ділення: ці задачі схожі тим, що обидві задачі містять три пропорційні величини; до однієї з них дано два числові значення, а обидва значення іншої величини є шуканими; величина однієї одиниці є однаковою для обох випадків; відрізняються ці задачі тим, що в задачі на пропорційне ділення було дано значення суми загальних величин, а в задачі на знаходження невідомого за двома різницями — значення різниці.

Отже, в обох задачах є однакова для двох випадків величина. Для розв'язування задач, які містять однакову величину, ключем є знаходження її значення. Учні згадують відомі способи знаходження значення однакової величини: 1) за числовими значеннями двох величин стосовно одного з випадків; 2) за двома сумарними значеннями двох величин; 3) за двома різницями.

Учні встановлюють, чи можна в розв'язуванні задачі застосувати один із цих способів. Застосовуємо третій спосіб знаходження значення однакової величини, тому що нам не дано значення двох величин стосовно одного з випадків або нам не дано сумарного значення однієї з величин, але нам дано різницю числових значень однієї величини у двох випадках. Отже, однакову величину знайдемо за двома різницями. Таким чином здійснена *зміна умови* задачі стала причиною застосування іншого способу знаходження значення однакової величини — за двома різницями. Далі здійснюється повний аналіз задачі, формулюється план її розв'язування і записується розв'язання та відповідь.

Розглянемо докладно методику роботи над цією задачею.

Що потрібно знати, щоб відповісти на перше запитання задачі «Скільки грошей одержали за сині ручки?» [Потрібно знати два числові значення: I — ціну синіх ручок (невідомо) та II — кількість синіх ручок (відомо, 12 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Множенням.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Ні, оскільки ми не знаємо ціну, а ціна — це однакова величина, її можна знайти за двома різницями.]

Що потрібно знати, щоб знайти ціну? [Потрібно знати два числові значення: I — різницю вартостей, або на скільки більше коштують сині ручки, ніж чорні (відомо, 32 грн), та II — різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх ручок, ніж чорних (невідомо).] Якою арифметичною дією дізнаємося про ціну? [Діленням: щоб знайти ціну, потрібно вартість поділити на кількість.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Ні, оскільки ми не знаємо різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх ручок, ніж чорних.] Що потрібно знати, щоб про це дізнатися? [Потрібно знати два числові значення: I — кількість синіх ручок (відомо, 12 шт.) та II — кількість чорних ручок (відомо, 8 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Відніманням.] Чи можна тепер відповісти на перше запитання задачі? [Так.] Ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.

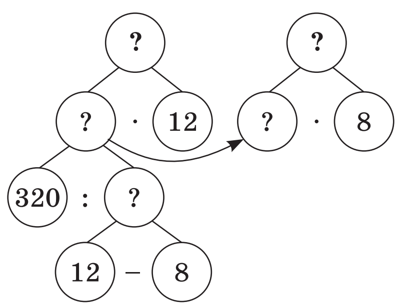
Що потрібно знати, щоб відповісти на друге запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — ціну (поки що невідомо, але ми про це дізнаємося, відповідаючи на перше запитання задачі) та II — кількість чорних ручок (відомо, 8 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання задачі? [Множенням.]

Складіть план розв'язування задачі. [Першою дією (відніманням) дізнаємося про різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх ручок, ніж чорних. Другою дією (діленням) дізнаємося про ціну ручки. Третьою дією (множенням) відповімо на перше запитання задачі і дізнаємося про вартість синіх ручок. Четвертою дією (множенням) відповімо на друге запитання задачі і дізнаємося про вартість чорних ручок.]

Запишіть розв'язання задачі.

[*Розв'язання:*

1) $12-8=4$ (шт.) — на стільки більше купили синіх ручок, ніж чорних; різниця між кількостями синіх та чорних ручок;
2) $32:4=8$ (грн) — ціна ручки;
3) $8\cdot 12=96$ (грн) — вартість синіх ручок;
4) $8\cdot 8=64$ (грн) — вартість чорних ручок.]



На друге запитання задачі можна відповісти інакше: знаючи вартість синіх ручок (96 грн) та на скільки це більше, ніж вартість чорних ручок (на 32 грн), можна дізнатися про вартість чорних ручок дією віднімання.

Запишіть відповідь до задачі.

[*Відповідь:* 96 грн одержали за сині ручки та 64 грн одержали за чорні ручки.]

Перевіркою розв'язання задачі є знаходження різниці знайдених чисел і порівняння одержаного значення з даним в умові задачі.

Після розв'язання задачі на знаходження невідомих за двома різницями порівнюємо задачу на знаходження невідомих за двома різницями із задачею на пропорційне ділення з метою дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання. Згадуючи істотні ознаки задач на пропорційне ділення і встановлюючи зміни, які ми здійснили над математичною структурою задачі, формулюємо істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями.

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
4) стосовно однієї величини дано два числові значення для обох випадків;
5) стосовно іншої величини два числові значення є шуканими, але дано їх різницю.

Аналогічно, актуалізуючи узагальнений план розв'язування задач на пропорційне ділення, з'ясовуємо, як зміна умови вплинула на розв'язання задачі, і формулюємо план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина
I	?, однак.	□	?
II		□	?, на □ б. (м.)

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина
I	?, однак.	?	□
II		?, на □ б. (м.)	□

План розв'язування

1. Знаходжу дією віднімання різницю (другу різницю) поданих числових значень однієї з величин.
2. Знаходжу діленням двох різниць значення однакової величини (одиниці виміру).
3. Відповідаю на перше запитання задачі.
4. Відповідаю на друге запитання задачі.

Порівнюючи розв'язання задач, учні встановлюють, що в обох задачах однакові дві останні дії, тому що в обох задачах одні й ті самі запитання та одна й та сама однакова величина, яка потрібна для відповіді на обидва запитання задачі. Розв'язки відрізняються першими двома діями, тому що однакову величину знаходили по-різному: у задачі на пропорційне ділення — за двома сумами, а в задачі на знаходження невідомих — за двома різницями.

Узагальнюємо математичні структури задач на знаходження невідомих за двома різницями та задач на пропорційне ділення.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження невідомих за двома різницями (шукане — значення загальної величини)

Задачі на пропорційне ділення

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина	
I	?, однак.	□	?	} □
II		□	?	

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

	Величина одиниці	Кількість або час	Загальна величина
I	?, однак.	□	?
II		□	?, на □ б.

План розв'язування

1. Знаходжу суму/різницю поданих числових даних однієї з величин — кількості або часу.
2. Знаходжу значення однакової величини — величини однієї одиниці — за двома сумами/різницями.
3. Знаходжу шукане значення загальної величини, відповідаю на перше запитання задачі.
4. Знаходжу шукане значення загальної величини, відповідаю на друге запитання задачі.

Змінивши величини задачі, ми одержуємо також задачу на знаходження невідомих за двома різницями, яка містить ті самі числові дані. Тому ця зміна впливає на розв'язання задачі лише в сенсі зміни пояснень до арифметичних дій.

Зміна числових даних задачі не впливає на математичну структуру задачі. Одержана задача має всі перелічені істотні ознаки — це задача на знаходження невідомих за двома різницями. Розв'язання дещо змінюється: у ньому беруть участь інші числа, але арифметичні дії, їхній порядок та пояснення до них не змінюються. Отже, зміна числових даних задачі не впливає на план розв'язування задачі.

Порівнявши задачі на знаходження невідомих за двома різницями, учні встановлюють, що вони відрізняються групою величин та числовими даними, але кожна з них містить усі істотні ознаки, які було визначено при зіставленні задачі на знаходження невідомих за двома різницями і задачі на пропорційне ділення.

Далі досліджуємо, як зміниться розв'язання задачі, якщо *характер трактування заданої різниці* «на... більше» *зміниться* і стане «на... менше», або навпаки.

Розглянемо докладно методику роботи над цим завданням на прикладі вже розглянутої нами задачі.

Що позначає число 32? [Число 32 позначає, з одного боку, на скільки більше заплатили за сині ручки, ніж за чорні; якщо за сині ручки заплатили на 32 грн більше, ніж за чорні, то за чорні ручки заплатили на 32 грн менше, ніж за сині; отже, число 32 ще й позначає, на скільки менше заплатили за чорні ручки, ніж за сині.]

Розкажіть задачу, у якій число 32 буде позначати, на скільки менше заплатили за чорні ручки, ніж за сині.

Учні роблять висновок, що від цієї зміни розв'язання задачі не зміниться.

Проведена робота надає можливість узагальнити істотні ознаки, математичну структуру та план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями.

Отже, висновки, які були зроблені під час порівняння задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями, набули підтвердження. Визначені ознаки задачі на знаходження невідомих за двома різницями не змінилися ні від зміни величин задачі, ні від зміни числових даних задачі, а також ні від зміни характеру трактування заданої різниці; не змінився й план розв'язування задачі.

Діти навчилися перетворювати задачу першого підвиду на задачу другого підвиду на матеріалі задач на пропорційне ділення: потрібно замінити шукані числа їхніми числовими значеннями, а відомі числа замінити знаками питання, але слід дати про них додаткову відомість — їхню суму. У задачі на знаходження невідомих за двома різницями додаткова відомість не сума, а різниця. У задачі на знаходження обох значень загальної величини замінюємо шукані їхніми числовими значеннями, а значення кількості або часу стають, навпаки, шуканими, але включаємо в задачу їхню різницю. Усі зміни виконуються на короткому записі задачі, після чого учні складають задачу другого підвиду.

У кіоску продали за однаковою ціною сині та чорні ручки. За сині ручки одержали 96 грн, а за чорні — 64 грн. Скільки продали ручок кожного виду, якщо синіх ручок продали на 4 більше, ніж чорних?

Далі аналізується математична структура задачі: ця задача також має два випадки; три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дано два числові значення, а стосовно іншої — значення різниці, а числові значення окремо для першого і для другого випадку є шуканими. Задача також має два запитання. Це задача того ж самого виду — на знаходження невідомих за двома різницями.

Згадуємо, за яким планом розв'язуються задачі на знаходження невідомих за двома різницями, і дещо його змінюємо. Після розв'язування задачі порівнюємо розв'язання обох задач: спільні дві перші дії — перша дія віднімання, а друга дія ділення; відрізняються дві останні дії — у попередній задачі останні дві дії множення, а в цій задачі дві останні дії ділення.

Розв'язання:

1) $96-64=32$ (грн) — на стільки більше заплатили за сині, ніж за чорні ручки; різниця вартостей.
2) $32:4=8$ (грн) — ціна, однакова величина.
3) $96:8=12$ — стільки синіх ручок.
4) $32:8=3$ — стільки чорних ручок.

Відповідь: продали 12 синіх і 3 чорні ручки.

Учитель ще раз підкреслює: щоб відрізняти задачі на знаходження невідомих за двома різницями, домовилися вважати задачі, у яких дві останні дії множення, задачами першого підвиду, а задачі, у яких дві останні дії ділення, — задачами другого підвиду.

Зміна групи пропорційних величин та зміна числових даних не впливає на математичну структуру задачі та план її розв'язування.

Порівнявши математичні структури та розв'язування задач першого та другого підвидів (у задачах першого підвиду дано значення різниці загальної величини, а самі ці значення є шуканими; у задачах другого підвиду дано різницю кількості або часу, а самі величини є шуканими), узагальнюємо математичну структуру та план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями.

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;

3) значення однієї з величин є однаковим для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числові значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різницевого відношення.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

Шукане — значення величини кількості або часу

<table>
<tr><th></th><th>Величина одиниці</th><th>Кількість або час</th><th>Загальна величина</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однак.</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?, на □ б.</td><td>□</td></tr>
</table>

Шукане — значення загальної величини

<table>
<tr><th></th><th>Величина одиниці</th><th>Кількість або час</th><th>Загальна величина</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">?, однак.</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?, на □ б.</td></tr>
</table>

План розв'язування

1. Знаходжу різницю поданих числових значень однієї з величин.
2. Знаходжу значення однакової величини за двома різницями.
3. Відповідаю на перше запитання задачі.
4. Відповідаю на друге запитання задачі.

Можна *порівняти всі види задач на знаходження четвертого пропорційного, задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження невідомих за двома різницями*. У цих задачах спільними є два випадки, три пропорційні величини, одна величина є однаковою для обох випадків, стосовно однієї з величин дано два числові значення. У задачах на знаходження четвертого пропорційного щодо другої величини дано одне числове значення, а інше є шуканим. У задачах на $\frac{\text{пропорційне ділення}}{\text{знаходження невідомих за двома різницями}}$ для другої величини дано лише значення $\frac{\text{суми}}{\text{різниці}}$, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. У задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на $\frac{\text{пропорційне ділення}}{\text{знаходження невідомих за двома різницями}}$ — два.

Більш докладно про методику навчання розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями див. за посиланням.

Подальше дослідження задач цього виду засобом зміни однакової величини див. за посиланням.

ЗАДАЧІ НА ПОДВІЙНЕ ЗВЕДЕННЯ ДО ОДИНИЦІ

Методика формування в молодших школярів уміння розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці передбачає ознайомлення учнів із двома математичними структурами цих задач: спрощеною, у якій дано або є шуканою величина «подвійної одиниці» (3 клас), та дещо ускладненою — величина «подвійної одиниці» невідома, але не є шуканою (4 клас).

Учням пропонується задача на подвійне зведення до одиниці знайомої математичної структури (спрощеної, яка розглядалась у 3 класі).

1. Розв'яжіть задачу.

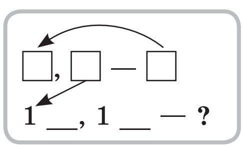
За 4 год роботи 2 трактори витратили 200 л бензину. Скільки літрів палива витратить за 1 год 1 трактор?

Проаналізувавши її формулювання і записавши задачу коротко, учні визначають вид цієї задачі, згадують узагальнений план розв'язування та розв'язують задачу двома способами.

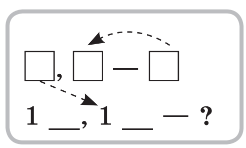
ПАМ'ЯТКА

Задачі на подвійне зведення до одиниці

I спосіб



II спосіб



План розв'язування

1. Знаходжу дією ділення величину однієї одиниці для певної кількості або часу.
2. Знаходжу дією ділення «подвійну одиницю» та відповідаю на запитання задачі.

Змінюємо запитання задачі — шуканим стає величина однієї одиниці для іншого числового значення кількості або часу.

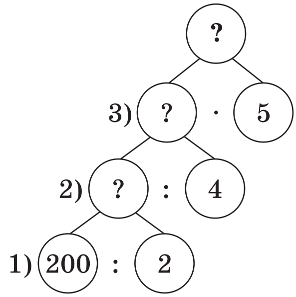
За 4 год роботи 2 трактори витратили 200 л бензину. Скільки літрів палива витратить за 5 год 1 трактор?

Учні порівнюють цю задачу з попередньою і встановлюють, що ця задача є продовженням попередньої задачі. Отже, ця задача має також два способи розв’язування: ставимо стрілочку і проводимо аналітичний пошук розв’язування задачі згідно з першим способом.

Розглянемо докладно методику роботи над цією задачею.

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі «Скільки палива витратить за 5 год 1 трактор?» [Потрібно знати два числові значення: I — скільки літрів палива потрібно для 1 трактора на 1 годину (невідомо) та II — час роботи трактора (відомо, 5 год).]

Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Множенням.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Ні, оскільки ми не знаємо об’єм бензину на 1 год для 1 трактора.] Об’єм палива на 1 год для 1 трактора — це однакова величина. Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання «Скільки літрів палива витратить за 1 год 1 трактор?» [Потрібно знати два числові значення: об’єм палива для одного трактора на весь час роботи (невідомо) та II — час роботи (відомо, 4 год).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Діленням.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Не можна, оскільки ми не знаємо об’єм палива на 4 год для 1 трактора.] Що потрібно знати, щоб знайти об’єм бензину на 4 год для 1 трактора? [Потрібно знати два числові значення: I — загальний об’єм бензину (відомо, 200 л) та II — кількість тракторів (відомо, 2 шт.).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Діленням.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Так, оскільки нам відомі обидва числові дані.] Отже, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.



Складаємо план розв’язування задачі. Першою дією (ділення) дізнаємося про об’єм пального на 4 год для 1 трактора. Другою дією (ділення) дізнаємося про об’єм пального на 1 год для 1 трактора, але ми ще не можемо відповісти на запитання задачі — це лише ключ до її розв’язку. Третьою дією відповімо на запитання задачі і дізнаємося про об’єм пального на 5 год для 1 трактора.

Розв’язання:

1) 200 : 2 = 100 (л) — об’єм бензину на 4 год для 1 трактора.
2) 100 : 4 = 25 (л) — об’єм бензину на 1 год для 1 трактора.
3) 25 · 5 = 125 (л) — об’єм бензину на 5 год для 1 трактора.

Відповідь: 125 л палива витратить 1 трактор за 5 год роботи.

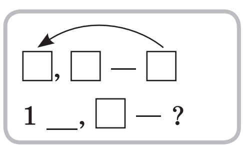
Звертаємо увагу дітей на те, що ключем до розв’язування задачі є величина «подвійної одиниці» — однакова величина. Далі ставимо дужку і пояснюємо другий спосіб розв’язування. Розв’язавши задачу другим способом, порівнюємо обидва способи: у них спільні арифметичні дії та їхній порядок, крім того, однакові останні дії і однакове пояснення до другої дії; відрізняються першими діями і поясненнями до них, а також другими діями. Учні показують стрілочками два способи розв’язування.

Узагальнюємо перший та другий способи розв’язування.

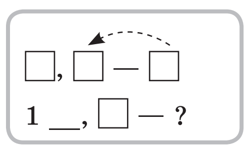
ПАМ’ЯТКА

Задачі на подвійне зведення до одиниці

I спосіб



II спосіб



План розв’язування

1. Знаходжу дією ділення величину однієї одиниці для певної кількості або часу.
2. Знаходжу дією ділення «подвійну одиницю» — ключ до розв’язання задачі.
3. Знаходжу величину однієї одиниці для іншого значення кількості або часу, відповідаю на запитання задачі.

У попередній задачі змінюємо ситуацію задачі, змінюємо величини, а числові дані залишаємо тими самими. Учні складають задачу і з’ясовують, що розв’язувати її не треба — розв’язання двома способами вже є на дошці, слід змінити лише пояснення до арифметичних дій. Отже, зміна величин задачі не впливає ні на перший, ні на другий способи розв'язування.

У попередній задачі залишаємо тими самими величини, але змінюємо числові дані і з'ясовуємо, як від цього зміниться розв'язання, власне план розв'язування. У розв'язанні попередньої задачі учні змінюють відповідні числа і пояснення до першої дії. Але арифметичні дії та їхній порядок не змінюються. Узагальнений план розв'язування також не змінився.

Повертаємося до схематичного короткого запису задачі. *Змінюємо смислове значення* одного з чисел у другому випадку і досліджуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Розв'язання майже не змінюється, учні поправляють лише пояснення до останньої дії, загальний план розв'язування не змінився.

Ознайомлення із задачами другого підвиду. Учням пропонується задача першого підвиду на знаходження величини однієї одиниці для заданого значення часу.

2. Розв'яжіть задачу.

За 9 год 4 сівалки засіяли 108 га ячменю. Скільки гектарів ячменю можна засіяти за 20 год 1 сівалкою?

Учні «впізнають» задачу, установлюючи, що вона має усі істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці, тому вона розв'язується двома способами. Актуалізується узагальнений план розв'язування задач цього виду і записується розв'язання двома способами.

Розв'язання:

I спосіб

1) $108:9=12$ (га) — 4 сівалки за 1 год;
2) $12:4=3$ (га) — 1 сівалка за 1 год;
3) $3\cdot 20=60$ (га) — 1 сівалка за 20 год.

Або: $108:9:4\cdot 20=60$ (га)

II спосіб

1) $108:4=27$ (га) — 1 сівалка за 9 год;
2) $27:9=3$ (га) — 1 сівалка за 1 год;
3) $3\cdot 20=60$ (га) — 1 сівалка за 20 год.

Або: $108:4:9\cdot 20=60$ (га)

Відповідь: 60 га ячменю можна засіяти 1 сівалкою за 20 год.

Після розв'язання цієї задачі складаємо обернену задачу на знаходження числового значення часу в другому випадку.

Обернена задача. За 9 год 4 сівалки засіяли 108 га ячменю. За скільки годин 1 така сівалка може засіяти 60 га ячменю?

Учні змінюють короткий запис попередньої задачі так, щоб одержати короткий запис цієї задачі; порівнюють пряму та обернену задачі і доходять висновку, що вони мають схожу математичну структуру, тому вони мають схожі способи розв'язування. Учні ставлять стрілочки і розповідають спочатку розв'язання першим способом, а потім — другим.

І спосіб. Першою дією (діленням) дізнаємося про площу ячменю, який засіяли 4 сівалками за 1 год. Другою дією (діленням) дізнаємося про площу ячменю, який засіяли 1 сівалкою за 1 год, — це ключ до розв'язання задачі. Третьою дією (діленням) відповідаємо на запитання задачі; дізнаємося, за скільки годин можна засіяти 60 га ячменю 1 такою сівалкою.

1) 108 : 9 = 12 (га) — 4 сівалки за 1 год;
2) 12 : 4 = 3 (га) — 1 сівалка за 1 год;
3) 60 : 3 = 20 — за стільки годин засіють 60 га ячменю 1 сівалкою.

Або: 108 : 9 : 4 : 3 = 20

ІІ спосіб. Першою дією (діленням) дізнаємося про площу ячменю, який засіяли 1 сівалкою за 9 год. Другою дією (діленням) дізнаємося про площу ячменю, який засіяли 1 сівалкою за 1 год, — це ключ до розв'язання задачі. Третьою дією (діленням) відповідаємо на запитання задачі; дізнаємося, за скільки годин можна засіяти 60 га ячменю 1 такою сівалкою.

1) 108 : 4 = 27 (га) — 1 сівалка за 9 год;
2) 27 : 9 = 3 (га) — 1 сівалка за 1 год;
3) 60 : 3 = 20 — за стільки годин засіють 60 га ячменю 1 сівалкою.

Або: 108 : 4 : 9 : 3 = 20

Після запису розв'язання задачі учні *порівнюють перший спосіб розв'язування прямої та оберненої задачі*: вони схожі двома першими діями, відрізняються останньою дією — у прямій задачі остання дія множення, а в оберненій — остання дія ділення. Аналогічних висновків школярі доходять, порівнявши другі способи розв'язування прямої та оберненої задач.

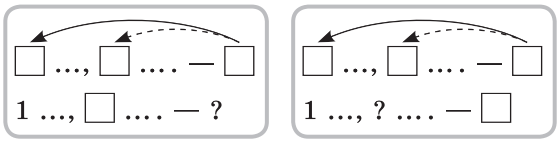
Отже, ці дві задачі мають схожу математичну структуру, тому вони належать до одного виду. Але розв'язання цих задач відрізняються останніми діями: у першій задачі остання дія множення, а в другій — ділення, тому перша задача є задачею І підвиду, а друга — ІІ підвиду.

Узагальнюємо істотні ознаки, математичну структуру та план розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці.

ПАМ’ЯТКА

Задачі на подвійне зведення до одиниці

I підвид II підвид



План розв’язування

1. Знаходжу величину однієї одиниці для певної кількості або часу.
2. Знаходжу величину «подвійної одиниці».
3. Відповідаю на запитання задачі.

Змінюємо величини або числові значення задачі й досліджуємо вплив цієї зміни на розв’язання. Від зміни величин та від зміни числових даних задачі математична структура задачі на подвійне зведення до одиниці не змінилася; причому від цих змін узагальнений план розв’язування також не змінився. Отже, якщо задача матиме розглянуту математичну структуру, незалежно від того, які величини вона містить та які числові дані, це буде задача на подвійне зведення до одиниці, яка розв’язується двома способами за узагальненим планом.

Подальше дослідження задач на подвійне зведення до одиниці за допомогою складання і розв’язування інших обернених задач див. за посиланням.

Дослідження взаємозв’язку задач на знаходження четвертого пропорційного та задач на подвійне зведення до одиниці. Як було зазначено вище, задачі на подвійне зведення до одиниці належать до ускладнених задач на знаходження четвертого пропорційного. Але, крім наявності в цих задачах величини однієї, або «подвійної одиниці», інших спільних ознак учні не встановили. Це пояснюється математичною структурою задач на подвійне зведення до одиниці, що пропонувалися в 3 класі. У 4 класі математична структура задач цього виду ускладнюється й існує можливість перетворити задачу на знаходження четвертого пропорційного на задачу на подвійне зведення до одиниці, тим самим показавши взаємозв’язок між ними.

Тому учням пропонується для розв'язання задача на знаходження четвертого пропорційного, у якій однаковою є величина однієї одиниці, а шуканим є значення загальної величини.

3. Розв'яжіть задачу.

За 3 рейси човняр перевіз через річку 18 туристів. Скільки туристів він зможе перевезти за 7 таких рейсів?

Діти «впізнають» задачу та застосовують узагальнений план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного.

1) $18:3=6$ (т.) — кількість людей за 1 рейс;
2) $6\cdot7=42$ (т.) — загальна кількість людей за 7 рейсів.

Або: $18:3\cdot7=42$ (т.)

Робота над задачею після її розв'язання полягає в *ускладненні задачі на знаходження четвертого пропорційного засобом введення значення ще однієї величини*. Записавши задачу на знаходження четвертого пропорційного у вигляді пропорції, діти зазначають, що ключем до розв'язання цієї задачі було знаходження однакової величини — величини однієї одиниці. Ускладнюємо цю задачу, увівши числове значення ще однієї величини, наприклад, у попередній задачі мова йшла про працю одного човняра, а в ускладненій — про роботу кількох човнярів. Зрозуміло, що у зв'язку з тим, що кількість човнярів збільшилася, збільшиться і значення загальної величини (кількості туристів, яких перевіз човняр) у стільки разів, у скільки разів збільшилася кількість човнярів. У попередній задачі замінюємо числове значення загальної величини в першому випадку на знайдене число. Запитання задачі залишаємо тим самим, але підкреслюємо, що запитується про одного човняра.

За 3 рейси 2 човняри перевезли 36 туристів. Скільки туристів перевезе 1 човняр за 7 таких рейсів?

Порівнявши одержану задачу з попередньою, учні встановлюють, що в них описується одна й та сама ситуація, є спільні величини, але в попередній задачі мова йшла тільки про одного човняра, а в цій задачі в першому випадку працюють два човняри, а в другому — лише один. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного доповнюється відповідними числовими даними, й учні «впізнають» одержану задачу — задачу на подвійне зведення до одиниці. Згадується узагальнений план розв'язування задач цього виду, і школярі розв'язують одержану задачу двома способами. Звертаємо увагу учнів на один із них.

Розв'язання:

1) $36:2=18$ (т.) — перевезе 1 човняр за 3 рейси;
2) $18:3=6$ (т.) — перевезе 1 човняр за 1 рейс;
3) $6\cdot 7=42$ (т.) — перевезе 1 човняр за 7 рейсів.

Або: $36:2:3\cdot 7=42$ (т.)

Відповідь: 42 туристи перевезе 1 човняр за 7 рейсів.

Після розв'язання задачі учні порівнюють розв'язання задачі на подвійне зведення до одиниці та задачі на знаходження четвертого пропорційного і доходять висновку: задача на подвійне зведення до одиниці розв'язується трьома діями, тому що введено значення ще однієї величини, а задача на знаходження четвертого пропорційного — двома; причому обидва розв'язання містять дві однакові дії. Можна стверджувати, що, виконавши першу дію у розв'язанні задачі на подвійне зведення до одиниці, ми звели цю задачу до задачі на знаходження четвертого пропорційного. Спільними в обох задачах є наявність однакової величини — величини однієї одиниці в задачі на знаходження четвертого пропорційного і величини «подвійної одиниці» у задачі на подвійне зведення до одиниці. Спосіб розв'язування цих задач полягає в знаходженні значення величини однієї одиниці (зведення до одиниці) або значення величини «подвійної одиниці» (подвійне зведення до одиниці).

4.4.2.2. Задачі на процеси

ЗАДАЧІ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ

У 3 класі учні ознайомилися із задачами на спільну роботу, у яких було дано продуктивності праці кожного виконавця. У 4 класі математична структура задач на спільну роботу ускладнюється, і тепер продуктивності праці кожного виконавця є проміжними невідомими задачі.

На етапі підготовчої роботи актуалізуємо вміння учнів розв'язувати задачі, які містять величини: загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи, — різних математичних структур, зокрема на знаходження четвертого пропорційного. Крім того, учні згадують істотні ознаки та способи розв'язування задач на спільну роботу, які пропонувалися в 3 класі.

Так само, як і в 3 класі, на етапі підготовки пропонуємо учням задачі на знаходження спільної продуктивності праці, але не прості, а складені. У цих задачах не дано продуктивності праці кожного виконавця, але відомий загальний виробіток та час роботи кожного з виконавців.

1. Розв'яжіть задачу.

Перший насос 640 відер води викачує за 8 хв, а другий насос 420 відер води викачує за 6 хв. Скільки відер води викачають за 1 год обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Отже, на цьому етапі опрацьовуємо вміння знаходити спільну продуктивність праці за даними значеннями загального виробітку та часу роботи кожного виконавця.

Щоб знайти спільну продуктивність праці двох виконавців, треба:

1) знайти продуктивність праці першого виконавця дією множення;
2) знайти продуктивність праці другого виконавця дією множення;
3) знайти спільну продуктивність праці дією додавання.

На етапі ознайомлення учням спочатку пропонується підготовча задача на знаходження спільної продуктивності праці за даними значеннями загального виробітку (однаковий для обох виконавців) та часу роботи кожного виконавця.

2. Розв'яжіть задачу.

Перший насос викачує 24 т води за 6 год, а другий — за 3 год. Скільки тонн води викачають за 1 год обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Учні згадують, як знаходити спільну продуктивність праці, і формулюють план розв'язування цієї задачі. Далі змінюють запитання задачі — і шуканим стає час спільної роботи при тому самому загальному виробітку.

3. Розв'яжіть задачу.

Перший насос викачує 24 т води за 6 год, а другий — за 3 год. За скільки годин викачають цю воду обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Школярі порівнюють задачу з попередньою і встановлюють, що ця задача є продовженням попередньої. Далі проводиться аналітичний пошук розв'язування і складається план розв'язування задачі; з'ясовується, як зміна запитання задачі вплинула на її розв'язання, — треба виконати ще одну арифметичну дію, щоб відповісти на запитання задачі.

Зміна ситуації задачі та *зміна числових даних* не впливає на математичну структуру задачі та план її розв'язування. Після проведеної роботи учні порівнюють усі задачі й узагальнюють їхні істотні ознаки, математичну структуру та план розв'язування.

Істотні ознаки задач на спільну роботу, у яких шуканим є час спільної роботи:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи обох виконавців;
3) для двох випадків (першого і другого) дано значення загальної продуктивності і часу роботи;
4) для одного з випадків (третього) дано значення загальної величини, а значення часу є шуканим.

ПАМ'ЯТКА

Задачі, обернені до задач на спільну роботу (шукане — час спільної праці)

	Продуктивність праці	Час роботи	Загальний виробіток
I	?	□	□
II	?	□	□
I і II	?	**?**	□

План розв'язування

1. Визначаю продуктивність першого виконавця дією ділення.
2. Визначаю продуктивність другого виконавця дією ділення.
3. Визначаю продуктивність спільної роботи дією додавання.
4. Визначаю час спільної роботи дією ділення.

Зміна шуканого задачі та дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру й план розв'язування задачі. Учням пропонується скласти і розв'язати обернену задачу на знаходження загального виробітку при спільній праці. Школярі виконують зміни в короткому записі прямої задачі і формулюють обернену задачу.

Обернена задача 1. Перший насос викачує 24 т води за 6 год, а другий — за 3 год. Скільки тонн води викачають обидва насоси за 2 год, працюючи разом?

Далі з'ясовується, що одержана задача також належить до задач на спільну роботу і має аналогічний план розв'язування, але зміна шуканого впливає на четверту дію: остання дія в оберненій задачі 1 — множення, тому що шуканим є загальний виробіток. Порівнявши плани розв'язування прямої та оберненої задачі 1, учні формулюють узагальнений план розв'язування.

Дослідження задачі йде далі: учні складають і розв'язують ще чотири обернені задачі — на знаходження часу роботи першого (другого) виконавця та на знаходження загального виробітку першого (другого) виконавця.

Обернена задача 2. Другий насос викачує 24 т води за 3 год. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Обернена задача 3. Другий насос викачує 24 т води за 3 год. Скільки тонн води викачає перший насос за 6 год, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Обернена задача 4. Перший насос викачує 24 т води за 6 год. За скільки годин викачає цю воду другий насос, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Обернена задача 5. Перший насос викачує 24 т води за 6 год. Скільки тонн види викачає другий насос за 3 год, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 год?

Одержавши короткий запис кожної оберненої задачі шляхом виконання змін у короткому записі попередньої задачі, учні встановлюють, що це також задачі на спільну роботу. Ключем до розв'язання задач на спільну роботу є знаходження спільної продуктивності праці, але в обернених задачах 2–5 спільну продуктивність праці знаходять за даним значенням загального виробітку при спільній роботі та за часом спільної роботи. Далі розв'язання йде традиційно — знаходимо продуктивність одного з виконавців за даними його загального виробітку та часу роботи. А продуктивність іншого виконавця знаходимо як різницю знайдених числових значень, що надає нам можливість відповісти на запитання задачі.

Отже, порівнявши математичні структури прямої та обернених задач і плани їх розв'язування, узагальнюємо істотні ознаки, математичну структуру та план розв'язування задач на спільну роботу.

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, третій — спільної роботи двох виконавців;

3) для двох випадків дано значення загального виробітку і часу роботи;
4) для іншого випадку дано лише одне числове значення (або загального виробітку, або часу роботи), а інше є шуканим.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на спільну роботу та обернені до них задачі

План розв'язування

1. Визначаю продуктивність виконавця.
2. Визначаю продуктивність виконавця / спільну продуктивність.
3. Визначаю спільну продуктивність / продуктивність виконавця.
4. Відповідаю на запитання задачі.

Докладніше методику навчання розв'язування задач на спільну роботу див. за посиланням.

Методику ознайомлення із задачами на спільну роботу, у яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей двох виконавців, див. за посиланням.

ЗАДАЧІ НА ОДНОЧАСНИЙ РУХ У РІЗНИХ НАПРЯМКАХ

Особливий вид задач, які містять опис процесу руху двох тіл, що переміщуються в одному або в різних напрямках одне відносно одного, ми називаємо задачами на рух. До задач на рух належать задачі:

- на рух у різних напрямках: назустріч, у протилежних напрямках;
- на рух в одному напрямку: навздогін та з відставанням.

Задачі на рух містять пропорційні величини: подоланий шлях, швидкість та час. Задачі цього виду мають три підвиди залежно від даних та шуканого:

I — задачі на знаходження подоланого шляху: дано значення швидкості руху обох тіл та час їхнього спільного руху, треба знайти подоланий шлях;

II — задачі на знаходження швидкості: дано значення шляху, який подолали обидва тіла, відомий час їхнього спільного руху та швидкість руху одного з тіл, треба знайти швидкість руху іншого тіла;

III — задачі на знаходження часу: дано значення подоланого шляху та швидкостей руху обох тіл, треба визначити час їхнього спільного руху.

У методичній літературі описано підхід до ознайомлення учнів із задачами на одночасний рух у різних напрямках, згідно з яким учні спочатку ознайомлюються з трьома підвидами задач на одночасний рух назустріч і розв'язують їх двома способами, і лише після цього ознайомлюються із задачами на одночасний рух у протилежних напрямках. Проте задачі на знаходження подоланого шляху при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках мають однакові способи розв'язування. Те ж саме можна сказати і про задачі на знаходження швидкості та часу. Тому має сенс розглядати одночасно задачі на рух назустріч та задачі на рух у протилежних напрямах.

Треба зазначити, що традиційно учні відразу ознайомлюються з двома способами розв'язування задач на знаходження подоланого шляху і швидкості руху. Однак ці способи принципово відмінні: при розв'язуванні *першим способом* розглядають рух кожного тіла окремо і лише потім відповідають на запитання задачі; а при розв'язанні *другим способом* розглядають рух одного тіла відносно іншого і дізнаються, на скільки змінюється подоланий шлях між тілами за одиницю часу. Саме це і є ключем до розв'язування задачі, після чого можна відповісти на її запитання. Практика свідчить, що учні краще засвоюють перший спосіб міркування, другий спосіб міркування викликає в багатьох школярів труднощі. Тому ми пропонуємо спочатку навчити молодших школярів розв'язувати задачі першим способом, а потім другим; після чого порівняти їх і узагальнити.

Отже, ми пропонуємо підхід, коли задачі на одночасний рух назустріч і в протилежних напрямках розглядаються разом; спочатку розв'язуються задачі на знаходження подоланого шляху і швидкості першим способом; після засвоєння першого способу розв'язування вводиться другий спосіб і вивчаються задачі на знаходження часу.

Метою підготовчої роботи є актуалізувати знання пропорційних величин: подоланий шлях, швидкість та час; взаємозв'язків між ними; спостереження за рухом двох тіл одне відносно одного.

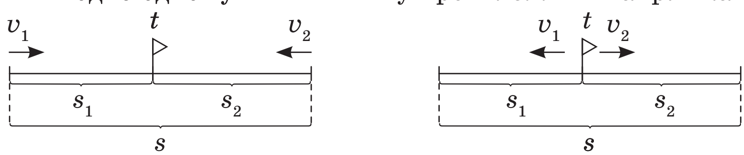
Актуалізація знань учнів про пропорційні величини: подоланий шлях, швидкість та час, — здійснюється під час розв'язування простих та складених задач відомих видів. Крім того, на цьому етапі слід повторити не лише взаємозв'язок між цими величинами, а й приділити певну увагу фізичному змісту швидкості.

На етапі підготовчої роботи також слід узагальнити й систематизувати уявлення дітей про рух назустріч та рух у протилежних напрямах. З цією метою учні спостерігають за рухом одного тіла відносно іншого і вчаться схематично зображувати рух.

Схематичне зображення одночасного руху двох тіл назустріч та в протилежних напрямках

Одночасний рух назустріч одне одному

Одночасний рух двох тіл у протилежних напрямках



Спостерігаючи за одночасним рухом двох тіл, учні роблять висновки про характер зміни відстані між тілами при русі назустріч та при русі в протилежних напрямках; про час руху обох тіл та про величину пройденого шляху між тілами на момент початку (закінчення) руху.

Під час одночасного руху двох тіл $\frac{\text{назустріч}}{\text{у протилежних напрямках}}$:

1) подоланий шлях між тілами протягом усього часу руху $\frac{\text{зменшується}}{\text{збільшується}}$;
2) весь шлях складається зі шляху, який подолало перше тіло, та шляху, який подолало друге тіло;
3) кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

$$s = s_1 + s_2$$
$$t = t_1 = t_2$$

Для усвідомлення зроблених висновків учням пропонують спеціальні завдання на знаходження часу руху кожного тіла, якщо відомий час зустрічі тіл; на знаходження часу руху одного з тіл, якщо відомий час руху другого тіла до зустрічі; на порівняння відстаней, яке подолало кожне тіло, за умов однакових та різних швидкостей; на визначення характеру зміни відстані між тілами при їх одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках, на визначення числового значення цієї зміни за одиницю часу.

1. Дайте відповіді на запитання.

1) Із двох міст одночасно назустріч одне одному вийшли два пішоходи й зустрілися за 3 год. Скільки часу рухався кожний пішохід?

2) Із села в місто вийшов пішохід. У той самий час із міста йому назустріч виїхав мотоцикліст, який зустрів пішохода за 40 хв. Скільки часу рухався до зустрічі пішохід?

3) Два пішоходи вийшли одночасно в протилежних напрямах і закінчили свій рух за 2 год. Скільки часу рухався кожний пішохід? Що можна сказати про шлях, який подолав кожний пішохід, якщо: вони рухалися з однаковою швидкістю; швидкість руху першого пішохода більша, ніж швидкість руху другого пішохода.

4) Два лижники вийшли одночасно назустріч один одному. Перший лижник ішов зі швидкістю 12 км/год, а другий — 14 км/год. Як змінюється подоланий шлях між лижниками? На скільки зменшиться подоланий шлях за першу годину? за другу годину?

5) Два велосипедисти виїхали одночасно з одного пункту в протилежних напрямах. Швидкість руху першого велосипедиста становить 5 м/с, а другого — 3 м/с. Як змінюється подоланий шлях між велосипедистами? На скільки збільшиться подоланий шлях за першу секунду? за другу секунду?

Після розв'язання задач, аналогічних останній, учні роблять висновок.

Якщо два тіла рухаються одночасно назустріч одне одному або в протилежних напрямках, то шлях між ними весь час **змінюється на одне й те саме число**, яке дорівнює **сумі шляхів, що долає кожне тіло за одиницю часу.**

З метою закріплення цього висновку учні розв'язують задачі на визначення характеру та числового значення зміни відстані між тілами за одиницю часу при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, якщо задано швидкість руху кожного тіла; складають і розв'язують обернені до них задачі на знаходження швидкості; розв'язують задачі на знаходження швидкості руху одного з тіл за відомими швидкістю руху іншого тіла та числовим значенням зміни відстані між тілами за одиницю часу.

2. Розв'яжіть задачі.

1) Дві черепахи одночасно виринули назустріч одна одній. Швидкість руху першої черепахи становить 9 дм/хв, а швидкість руху другої черепахи — 5 дм/хв. Як змінюється подоланий шлях між черепахами? На скільки дециметрів зменшується подоланий шлях між черепахами за кожну секунду?

2) Два лижники вийшли з одного селища одночасно в протилежних напрямках. Знайдіть швидкість руху другого лижника, якщо відома швидкість руху першого лижника — 5 км/год — і відомо, що вони віддаляються щогодини на 12 км.

Ознайомлення з першим способом розв'язування задач на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках відбувається шляхом розв'язання задачі.

3. Розв'яжіть задачу.

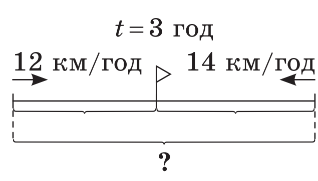
Два лижники вийшли одночасно назустріч один одному з двох селищ і зустрілися за 3 год. Перший лижник рухався зі швидкістю 12 км/год, а другий — 14 км/год. Яка відстань між селищами?

Розглянемо докладно методику роботи над задачею.

Про що йде мова в задачі? [У задачі йде мова про рух двох лижників. Тому короткий запис задачі буде у формі креслення.] Що відомо про час початку руху? [Лижники почали рухатися одночасно.] Як рухалися лижники? [Лижники рухалися назустріч один одному.] Покажемо рух назустріч на кресленні стрілочками. Зробіть висновки.

[1) Подоланий шлях між тілами весь час зменшується.
2) Весь шлях складається зі шляху, який подолало перше тіло, та шляху, який подолало друге тіло.
3) Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.]

Складіть короткий запис задачі. [Над стрілочками записуємо швидкість руху кожного лижника. Поставимо прапорець на місті зустрічі: тут треба подумати, як цей прапорець розташовується



відносно селищ — швидкість руху першого лижника менша, ніж швидкість руху другого лижника, на рух вони витратили однаковий час, тобто 3 год, — це значить, що перший лижник подолав менший шлях, ніж другий. Прапорець треба поставити ближче до першого селища. На рух кожний лижник витратив по 3 год, лижники зустрілися за 3 год. Біля прапорця напишемо: $t=3$ год. Треба знайти відстань між селищами: позначимо її фігурною дужкою і поставимо знак питання. Нагадаємо, що відстань складається зі шляху, який подолав перший лижник, та шляху, який подолав другий лижник. Покажемо це фігурними дужками.]

За коротким записом поясніть числа задачі. [Число 12 позначає швидкість руху першого лижника. 12 км/год означає, що перший лижник за кожну годину долав по 12 км. Число 14 позначає швидкість руху другого лижника. 14 км/год означає, що за кожну годину другий лижник долав по 14 км. Число 3 позначає час, протягом якого рухався кожний лижник.]

Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину? Як шукана величина пов'язана з двома іншими величинами? [У задачі запитується про відстань між селищами. Відстань між селищами дорівнює усьому шляху, який подолали лижники разом. Отже, весь подоланий шлях складається зі шляху, який подолав перший лижник, та шляху, який подолав другий лижник. Щоб знайти подоланий шлях, треба швидкість помножити на час.]

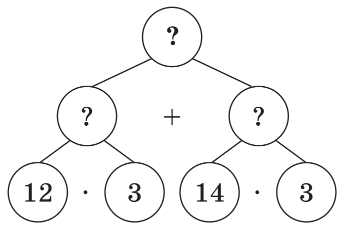
Яке запитання задачі? [Яка відстань між селищами?] Як ми його переформулювали? [Який шлях подолали обидва лижники разом?]

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — шлях, який подолав перший лижник (невідомо), та II — шлях, який подолав другий лижник (невідомо).] Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Додаванням.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Не можна, тому що ми не знаємо: I — шлях, який подолав перший лижник, та II — шлях, який подолав другий лижник.] Що потрібно знати, щоб дізнатися про шлях, який подолав перший лижник? [Потрібно знати два числові значення: I — швидкість руху першого лижника (відомо, 12 км/год) та II — час руху першого лижника (відомо, 3 год).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Множенням.]

Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? [Не можна, тому що ми не знаємо, який шлях подолав другий лижник.] Що потрібно знати, щоб про це дізнатися? [Потрібно знати два числові значення: I — швидкість руху другого лижника (відомо, 14 км/год) та II — час руху другого лижника (відомо, 3 год).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Множенням.]

Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? [Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.]

Складіть план розв'язування задачі. [Першою дією дізнаємося про шлях, який подолав перший лижник. Другою дією дізнаємося про шлях, який подолав другий лижник. Третьою дією дізнаємося про шлях, який подолали разом обидва лижники, і відповімо на запитання задачі.]



Запишіть розв'язання по діях із поясненнями; запишіть відповідь.

[*Розв'язання:*

1) 12 · 3 = 36 (км) — шлях, який подолав перший лижник;
2) 14 · 3 = 42 (км) — шлях, який подолав другий лижник;
3) 36 + 42 = 78 (км) — шлях, який подолали обидва лижники разом; відстань між селищами.

Відповідь: 78 км — відстань між селищами.]

З метою подальшого дослідження задач цього виду *змінюємо напрям руху* — тіла рухаються в протилежних напрямках. Досліджуємо вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Задача на знаходження подоланого шляху при одночасному русі назустріч перетворюється на задачу на знаходження подоланого шляху при одночасному русі в протилежних напрямках. Учні виконують зміни в кресленні, роблять висновки щодо характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу; про час, який витратило на рух кожне тіло; про шлях, який подолали обидва тіла; порівнюють одержану задачу з попередньою. Спільним у формулюванні цих задач є дійові особи; однакові значення величин: швидкостей та часу; в обох задачах вимагається знайти подоланий шлях; в обох задачах тіла почали рухатися одночасно. Відмінним у формулюванні задач є те, що в поданій задачі тіла рухалися назустріч одне одному, а в одержаній — у протилежних напрямках. Далі з'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання задачі: арифметичні дії не змінюються! Учні узагальнюють план розв'язування задач на знаходження подоланого шляху при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на одночасний рух двох тіл назустріч або в протилежних напрямках (шукане — подоланий шлях)

План розв'язування

1. Множенням визначаю шлях, який подолало перше тіло.
2. Множенням визначаю шлях, який подолало друге тіло.
3. Додаванням визначаю шлях, який подолали обидва тіла, роблю висновок про відстань на момент початку руху або на момент закінчення руху.

s — ?

1) $v_1 \cdot t = s_1$

2) $v_2 \cdot t = s_2$

3) $s_1 + s_2 = s$

Заміна числових даних швидкостей руху тіл змінними (буквами) та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Школярам пропонується задача, у якій значення швидкостей руху тіл подані змінними (буквами) і шуканим є подоланий шлях, але за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху в протилежних напрямках.

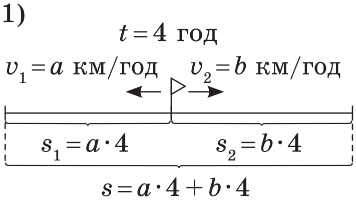
4. Розв'яжіть задачу.

Пішохід рухається зі швидкістю a км/год, а вершник рухається зі швидкістю b км/год. Знайдіть:

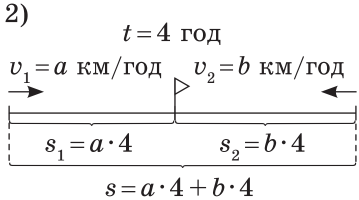
1) шлях, який буде між ними за 4 год, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах;
2) шлях, який був між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися за 4 год.

Учні виконують схематичний рисунок до кожного варіанта руху та розв'язують обидві задачі.

1)



2)



Заміна числових значень змінними (буквами) не вплинула на план розв'язування задач: першою дією (множенням) знаходимо шлях, який подолало перше тіло; другою дією (множенням) — шлях, який подолало друге тіло; третьою дією (додаванням) знаходимо шлях, який подолали обидва тіла.

Продовжуємо досліджувати задачі цього виду. З цією метою пропонуємо учням розв'язати задачу.

5. Розв'яжіть задачу.

Із двох сіл одночасно назустріч одне одному виїхали трактор та бричка з конем. Трактор рухався зі швидкістю 9 км/год, а швидкість руху брички становила 7 км/год. Яка відстань між селами, якщо трактор і бричка зустрілися за 2 год?

Учні розв'язують задачу на знаходження подоланого шляху при одночасному русі назустріч, застосовуючи узагальнений план розв'язування, і перевіряють правильність її розв'язання способом складання і розв'язування оберненої задачі на знаходження швидкості.

Досліджуємо, як *зміна шуканого* вплинула на математичну структуру й план розв'язування задачі.

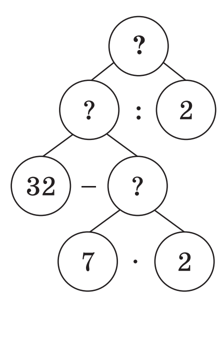
Обернена задача. Із двох сіл, відстань між якими становить 32 км, одночасно назустріч одне одному вирушили трактор та бричка з конем. Вони зустрілися за 2 год. Яка швидкість руху трактора, якщо швидкість руху брички становить 7 км/год?

Учні виконують зміни в короткому записі прямої задачі; роблять відповідні висновки; пояснюють числові дані задачі та з'ясовують, як пов'язана шукана величина з іншими величинами; виконують аналітичний пошук розв'язування задачі; формулюють план розв'язування і записують розв'язання по діях із поясненням.

Розглянемо докладно методику роботи над задачею.

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — шлях, який подолав трактор (невідомо), та II — час руху трактора (відомо, 2 год).] Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Діленням.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Не можна, тому що ми не знаємо, який шлях подолав трактор до зустрічі.]

Що потрібно знати, щоб дізнатися про шлях, який подолав трактор до зустрічі? [Потрібно знати два числові значення: I — загальний шлях, який подолали трактор і бричка разом (відомо, 32 км), та II — шлях, який подолала бричка (невідомо).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Відніманням.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Не можна, тому що ми не знаємо, який шлях подолала бричка.] Що потрібно знати, щоб про це дізнатися? [Потрібно знати два числові значення: I — швидкість руху брички (відомо,



7 км/год) та II — час руху брички (відомо, 2 год).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Множенням.] Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? [Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.]

Складіть план розв'язування задачі. [Першою дією (множенням) дізнаємося про шлях, який подолала бричка. Другою дією (відніманням) дізнаємося про шлях, який подолав трактор. Третьою дією (діленням) дізнаємося про швидкість руху трактора і відповімо на запитання задачі.]

Запишіть розв'язання задачі по діях із поясненнями й запишіть відповідь.

[*Розв'язання:*

1) $7 \cdot 2 = 14$ (км) — шлях, який подолала бричка;
2) $32 - 14 = 18$ (км) — шлях, який подолав трактор;
3) $18 : 2 = 9$ (км/год) — швидкість руху трактора.

Відповідь: 9 км/год — швидкість руху трактора.]

Отже, обернена задача також є задачею на рух. Зі зміною шуканого план розв'язування задачі також змінився.

З метою подальшого дослідження задач цього виду *змінюємо напрям руху* в оберненій задачі — тіла рухаються в протилежних напрямках. Досліджуємо вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Школярі виконують зміни в короткому записі оберненої задачі; пояснюють числові дані та роблять відповідні висновки; з'ясовують, чим одержана задача відрізняється від попередньої та як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Учні встановлюють, що розв'язання задачі лишається тим самим, план розв'язування не змінюється.

Узагальнюємо план розв'язування задач на знаходження швидкості руху одного з тіл при одночасному русі двох тіл назустріч та в протилежних напрямках.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках (шукане — швидкість руху одного з тіл)

План розв'язування

1. Множенням визначаю шлях, який подолало одне тіло.
2. Відніманням визначаю шлях, який подолало інше тіло.
3. Діленням визначаю швидкість руху іншого тіла.

v — ?

1) $v_1 \cdot t = s_1$
2) $s - s_1 = s_2$
3) $s_2 : t = v_2$

Заміна числових даних швидкості руху одного з тіл і подоланого шляху змінними (буквами) та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Пропонується задача, у якій значення швидкості руху одного тіла та подоланого шляху подані змінними (буквами) і шуканою є швидкість руху іншого тіла за умов двох варіантів руху — назустріч та в протилежних напрямках.

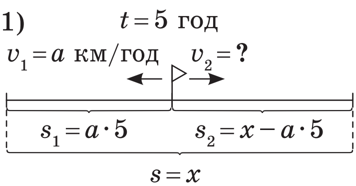
6. Розв'яжіть задачу.

Два велосипедисти вирушили одночасно, причому швидкість руху першого велосипедиста становить a км/год. Знайдіть швидкість руху другого велосипедиста, якщо:

1) вони рухаються в протилежних напрямах і шлях, який подолали тіла за 5 год після початку руху, становить x км;
2) відстань на початку руху становить x км, а зустріч відбулася за 5 год.

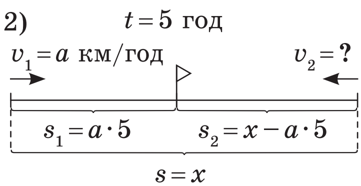
Учні виконують рисунок до кожного варіанта руху та розв'язують обидві задачі.

1)



$v_2 = (x - a \cdot 5) : 5$

2)



$v_2 = (x - a \cdot 5) : 5$

Заміна числових значень змінними (буквами) не вплинула на план розв'язування задач: першою дією (множенням) знаходимо шлях, який подолало перше тіло; другою дією (відніманням) знаходимо шлях, який подолало друге тіло; третьою дією (діленням) знаходимо швидкість руху другого тіла і відповідаємо на запитання задачі.

Порівнявши плани розв'язування задач на знаходження подоланого шляху і на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, робимо узагальнюючий висновок щодо істотних ознак та плану розв'язування задач цього виду.

Істотні ознаки задач на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках:

1) йде мова про спільний рух двох тіл — $\dfrac{\text{назустріч}}{\text{у протилежних напрямках}}$;
2) є чотири числові значення: швидкість руху першого тіла; швидкість руху другого тіла; час їхнього спільного руху; шлях, який подолали обидва тіла під час спільного руху, причому три з них дано, а одне — шукане.

ПАМ’ЯТКА

Задачі на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках (шукане — подоланий шлях або швидкість руху)

План розв’язування

1. Визначаю шлях, який подолало перше тіло.
2. Визначаю шлях, який подолало друге тіло.
3. Відповідаю на запитання задачі.

Для розв’язування задач на рух назустріч або в протилежних напрямках, у яких шуканим є або подоланий шлях, або швидкість руху, пропонуємо пам’ятку.

ПАМ’ЯТКА

Розв’язую складені задачі на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках (шукане — подоланий шлях або швидкість руху)

І спосіб

1. Визначаю, про що йде мова в задачі.
2. Визначаю, що відомо про час початку руху.
3. Визначаю, як рухаються тіла.
4. Роблю висновки:
   - подоланий шлях між тілами весь час $\frac{\text{збільшується}}{\text{зменшується}}$;
   - весь шлях складається зі шляху, який подолало перше тіло, та шляху, який подолало друге тіло;
   - кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.
5. Складаю короткий запис задачі.
6. За коротким записом пояснюю числа задачі.
7. Складаю план розв’язування задачі:
   - першою дією визначаю шлях, який подолало перше тіло;
   - другою дією визначаю шлях, який подолало друге тіло;
   - третьою дією відповідаю на запитання задачі.
8. Записую розв’язання задачі по діях із поясненнями або виразом.
9. Записую відповідь до задачі.
10. Складаю і розв’язую обернену задачу (на знаходження $\frac{\text{подоланого шляху}}{\text{швидкості}}$).

Ознайомлення з другим способом розв'язування задач на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках відбувається шляхом розв'язування задачі на знаходження подоланого шляху при одночасному русі двох тіл назустріч.

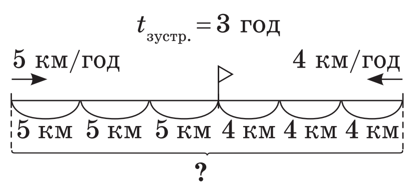
7. Розв'яжіть задачу.

З двох селищ одночасно назустріч одне одному вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість руху хлопчика становила 5 км/год, а швидкість руху дівчинки — 4 км/год. Яка відстань між селищами, якщо діти зустрілися за 3 год після початку руху?

Учні розв'язують цю задачу спочатку відомим їм способом.

Робота над задачею після її розв'язання полягає в розв'язанні цієї задачі другим способом. Пропозиція вчителя розв'язати задачу другим способом викликає здивування в учнів і активізує пізнавальну активність. Складається проблемна ситуація, вихід із якої полягає у зверненні уваги учнів на характер зміни відстані при одночасному русі назустріч — подоланий шлях щогодини зменшується; згадуємо, як дізнатися про числове значення зміни подоланого шляху (це було опрацьовано на етапі підготовки до введення задач на рух). Отже, ключ до розв'язання задачі іншим способом знайдено — характер і числове значення зміни відстані за одиницю часу!

Далі звертаємо увагу учнів на час руху обох тіл до моменту зустрічі, що свідчить про те, скільки разів здійснювалося наближення, поки вони не зустрілися. Помноживши числове значення відстані, на яку наближалися тіла за одиницю часу, на час їхнього руху до зустрічі, дізнаємося про шлях, на який вони наблизилися в результаті спільного руху, а тому й дізнаємося про шуканий подоланий шлях.



Розв'язання задачі другим способом передбачає ще й переформулювання запитання задачі. Запитання «Яка відстань між населеними пунктами, з яких почали рухатися тіла?» слід переформулювати так: «На яку відстань наблизилися тіла один до одного під час їхнього спільного руху до зустрічі?»

Розв'язання:

1) $5 + 4 = 9$ (км) — на стільки наближаються діти одне до одного щогодини;

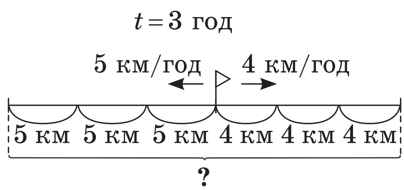
2) $9 \cdot 3 = 27$ (км) — на стільки наблизяться діти одне до одного за 3 год.

Відповідь: 27 км — відстань між селищами.

Змінюємо напрямок руху в задачі — тіла рухаються в протилежних напрямках. Досліджуємо, як ця зміна впливає на другий спосіб розв'язування.

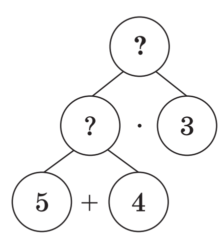
Пропонуємо учням перетворити попередню задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч на задачу на одночасний рух у протилежних напрямках і розв'язати її двома способами. Виконавши зміни в короткому записі попередньої задачі, учні пояснюють числові дані; роблять відповідні висновки; розв'язують задачу спочатку другим способом, переформулювавши запитання задачі. Далі здійснюються аналітичні міркування від запитання задачі до числових даних; складається план розв'язування; записується розв'язання задачі по діях із поясненням і відповідь.

Розглянемо докладно методику роботи над задачею.



За коротким записом поясніть числа задачі. Яке запитання задачі? Як можна його переформулювати? [Запитання: «Яка відстань між дітьми буде за 3 год?» можна переформулювати так: «На скільки збільшиться відстань між дітьми за 3 год?»] Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — на скільки кілометрів збільшується подоланий шлях між дітьми за кожну годину (невідомо) та II — час руху дітей (відомо, 3 год).]

Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Множенням.] Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Не можна, тому що ми не знаємо, на скільки збільшується подоланий шлях між дітьми за кожну годину.] Що треба знати, щоб про це дізнатися? [Потрібно знати два числові значення: I — шлях, який долає хлопчик за кожну годину (відомо, 5 км), та II — шлях, який долає дівчинка за кожну годину (відомо, 4 км).] Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? [Додаванням.] Чи можна відразу відповісти на це запитання? [Так.] Ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено.



Складіть план розв'язування задачі. [Першою дією дізнаємося, на скільки кілометрів збільшується подоланий шлях між дітьми за кожну годину. Другою дією дізнаємося, на скільки збільшиться подоланий шлях між дітьми за 3 год і відповімо на запитання задачі.]

Розв'язання:

1) $5+4=9$ (км) — на стільки збільшується подоланий шлях між дітьми за кожну годину;
2) $9 \cdot 3=27$ (км) — на стільки збільшиться подоланий шлях між дітьми за 3 год.

Відповідь: на 27 км збільшиться відстань між дітьми за 3 год.

Учитель пропонує порівняти другі способи розв'язування цієї та попередньої задач. Школярі помічають, що в них майже однакові розв'язання: однакові дії, але різні пояснення: у першій задачі тіла наближуються, а в другій — віддаляються; першою дією (додаванням) дізнаємося, на скільки тіла наближаються чи віддаляються, — на скільки змінюється подоланий шлях між тілами за одиницю часу, а другою дією (множенням) дізнаємося, на скільки тіла наблизилися чи віддалилися, — на скільки змінився подоланий шлях між тілами за весь час руху.

Розв'язавши задачу першим способом, порівнюємо перші способи розв'язування цих двох задач — учні доходять висновку, що вони мають однакові розв'язування. Потім порівнюємо перший та другий способи розв'язування задач: першим способом ми розв'язали задачу трьома діями, а другий спосіб містить лише дві дії.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках (шукане — подоланий шлях)

План розв'язування

I спосіб

1. Множенням визначаю шлях, який подолало перше тіло.
2. Множенням визначаю шлях, який подолало друге тіло.
3. Додаванням відповідаю на запитання задачі.

II спосіб

1. Додаванням визначаю, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу.
2. Множенням відповідаю на запитання задачі.

При першому способі розв'язування ми розглядаємо спочатку окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла і лише після цього знаходимо, який шлях подолали обидва тіла разом. При другому способі розв'язування ми розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного: спочатку знаходимо, на скільки змінюється подоланий шлях за одиницю часу, а потім — як змінився подоланий шлях за весь час руху.

Заміна числових даних швидкості руху змінними (буквами) та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Школярам пропонується задача, у якій значення швидкостей руху тіл подані змінними (буквами) і шуканим є подоланий шлях за умов двох варіантів руху — назустріч та в протилежних напрямках.

8. Розв'яжіть задачу.

Вантажівка їде зі швидкістю a км/год, а легковий автомобіль — зі швидкістю b км/год. Знайдіть:

1) шлях, який буде між ними за 7 год, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямках;

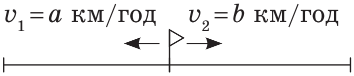
2) шлях, який був між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися за 7 год.

Діти виконують рисунок до кожного із варіантів руху та розв'язують обидві задачі двома способами.

1)

$t = 7$ год

$v_1 = a$ км/год $\quad v_2 = b$ км/год



s — ?

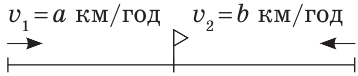
I спосіб

$s = a \cdot 7 + b \cdot 7$

2)

$t = 7$ год

$v_1 = a$ км/год $\quad v_2 = b$ км/год



s — ?

II спосіб

$s = (a + b) \cdot 7$

Як бачимо, вирази до першого та другого способів розв'язування цих задач однакові. Отже, заміна числових значень змінними (буквами) не впливає на способи розв'язування задач на знаходження подоланого шляху при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках.

Повертаємося до задачі із завдання 7 (с. 238). *Змінюємо шукане* задачі. Складаємо і розв'язуємо обернену задачу на знаходження швидкості при одночасному русі в протилежних напрямках.

9. Розв'яжіть задачу.

З одного селища одночасно в протилежних напрямках вирушили хлопчик і дівчинка. За 3 год подоланий шлях між ними становив 27 км. Яка швидкість руху хлопчика, якщо швидкість руху дівчинки становить 4 км/год?

Учні розв'язують цю задачу першим способом за пам'яткою.

Далі вчитель звертає увагу учнів на те, що при першому способі розв'язування ми розглядали рух тіл окремо один від одного. Розв'язуючи задачу другим способом, ми розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного. При розв'язуванні задачі другим способом нас цікавить характер зміни подоланого шляху між тілами за одиницю часу та числове значення цієї зміни. Якщо в задачі на знаходження подоланого шляху ми про це дізнавалися додаванням шляхів, яке подолало кожне тіло за одиницю часу, то в задачі на знаходження швидкості — діленням відстані, на яку віддалилися тіла, на час їхнього спільного руху. Знаючи, на скільки змінюється (збільшується) відстань за одиницю часу між тілами, і знаючи, який шлях долає одне з тіл за одиницю часу, дією віднімання знаходимо, який шлях долає інше тіло за одиницю часу; з цього робимо висновок про швидкість руху іншого тіла.

Розглянемо докладно методику роботи над задачею.

На скільки кілометрів віддалилися діти одне від одного за 3 год? [На 27 км.] На скільки кілометрів віддалилися діти одне від одного за 1 год? [На 27 : 3 = 9 км.] Скільки кілометрів із цих 9 км подолала дівчинка? [Дівчинка проходила за кожну годину по 4 км.] Скільки кілометрів із цих 9 км проходив хлопчик? [9 – 4 = 5 км.] Отже, хлопчик щогодини проходив по 5 км. Чому дорівнює швидкість руху хлопчика? [5 км/год.] Розкажіть план розв'язування цієї задачі. [Першою дією (діленням) дізнаємося, на скільки кілометрів віддалялися діти за 1 год. Другою дією (відніманням) дізнаємося, скільки кілометрів проходив за кожну годину хлопчик, тобто дізнаємося швидкість руху хлопчика.] Запишіть розв'язання задачі по діях із поясненням; запишіть відповідь.

[*Розв'язання:*

1) 27 : 3 = 9 (км) — на стільки віддалялися діти за кожну годину;
2) 9 – 4 = 5 (км) — проходив хлопчик за кожну годину, тому швидкість руху хлопчика становить 5 км/год.

Відповідь: 5 км/год — швидкість руху хлопчика.]

Отже, розв'язання задачі на знаходження швидкості при одночасному русі двох тіл у протилежних напрямках передбачає також переформулювання запитання. Запитання «Яка швидкість руху тіла?» з огляду на фізичний зміст швидкості замінюється запитанням: «Який шлях долає це тіло за одиницю часу?»

Припускаємо, що тіла рухалися назустріч одне одному і з'ясовуємо, як *зміна напрямку руху* впливає на знаходження швидкості руху одного з тіл другим способом. У розв'язанні треба виправити лише пояснення до першої дії: «на стільки кілометрів віддалялися діти за кожну годину» слід замінити на «на стільки кілометрів наближалися діти за кожну годину». Отже, ця зміна майже не впливає на план розв'язування задачі: першою дією (діленням) знаходимо, на скільки змінюється подоланий шлях між тілами за одиницю часу, а другою дією (відніманням) знаходимо, який шлях долає тіло за одиницю часу, і робимо висновок про швидкість руху цього тіла.

Порівнявши перші та другі способи розв'язування цих задач, узагальнюємо їх.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках (шукане — швидкість руху одного з тіл)

План розв'язування

I спосіб

1. Множенням визначаю шлях, який подолало одне тіло.
2. Відніманням визначаю шлях, який подолало друге тіло.
3. Діленням визначаю швидкість руху другого тіла.

II спосіб

1. Діленням визначаю, на скільки змінюється подоланий шлях між тілами за одиницю часу.
2. Відніманням визначаю, який шлях долає одне з тіл за одиницю часу, тобто дізнаюся про швидкість його руху.

При першому способі розв'язування ми розглядаємо спочатку окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла і лише після цього знаходимо шукану швидкість. При другому способі розв'язування ми розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного: спочатку знаходимо, на скільки змінюється подоланий шлях за одиницю часу, а потім — скільки кілометрів долає тіло за одиницю часу, і робимо висновок про швидкість його руху.

Заміна числових даних швидкості руху одного з тіл та відстані змінними (буквами) і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі.

Пропонується задача, у якій значення швидкості руху одного тіла та відстані подані змінними (буквами) і шуканою є швидкість руху іншого тіла за умов двох варіантів руху — назустріч та в протилежних напрямках.

10. Розв'яжіть задачу.

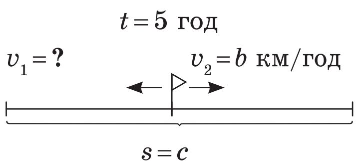
Вершник і велосипедист вирушили одночасно. Знайдіть швидкість руху вершника, якщо швидкість руху велосипедиста становить b км/год і якщо:

1) вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямках та за 5 год подоланий шлях між ними складав c км;

2) вони вирушили одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими становить c км, і зустрілися за 5 год.

Учні виконують рисунок до кожного варіанта руху та розв'язують обидві задачі двома способами.

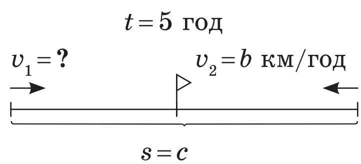
1)



I спосіб

$$v_1 = (c - b \cdot 5) : 5$$

2)



II спосіб

$$v_1 = c : 5 - b$$

Математичні моделі першого та другого способів розв'язування цих задач однакові; заміна числових значень змінними (буквами) не вплинула на розв'язання задач обома способами. Отже, напрямок руху (назустріч або в протилежних напрямках) не впливає на математичну модель задачі.

Методика роботи над задачами на рух назустріч або в протилежних напрямках, у яких шуканим є подоланий шлях або швидкість руху, здійснюється за пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Розв'язую складені задачі на одночасний рух двох тіл назустріч або в протилежних напрямках (шукане — подоланий шлях або швидкість руху)

II спосіб

1. Визначаю, про що йде мова в задачі.
2. Визначаю, що відомо про час початку руху.
3. Визначаю, як рухаються тіла.
4. Роблю висновки:
   - подоланий шлях між тілами весь час $\frac{\text{збільшується}}{\text{зменшується}}$;
   - весь шлях складається зі шляху, який подолало перше тіло, та шляху, який подолало друге тіло;
   - кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.
5. Складаю короткий запис задачі.
6. За коротким записом пояснюю числа задачі.
7. Складаю план розв'язування задачі:
   - першою дією визначаю, на скільки $\frac{\text{збільшується}}{\text{зменшується}}$ подоланий шлях між тілами за кожну годину;
   - другою дією відповідаю на запитання задачі.
8. Записую розв'язання задачі по діях із поясненнями або виразом.
9. Записую відповідь до задачі.
10. Розв'язую задачу першим способом або складаю і розв'язую обернену задачу (на знаходження $\frac{\text{подоланого шляху}}{\text{швидкості}}$).

Зазначимо, що треба звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями, причому першою дією знаходимо, на скільки змінюється подоланий шлях між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості — дією ділення.

Задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах вводимо як обернені задачі до задач на знаходження відстані.

11. Розв'яжіть задачу.

З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному вирушили два автобуси. Швидкість руху першого автобуса становить 60 км/год, швидкість руху другого автобуса — 90 км/год. Яка відстань між містами, якщо автобуси зустрілися за 3 год після початку руху?

Розв'язуємо пряму задачу другим способом, після її розв'язання *складаємо обернену задачу на знаходження часу*.

Обернена задача. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному вирушили два автобуси. Швидкість руху першого автобуса становить 60 км/год, швидкість руху другого автобуса — 90 км/год. За скільки годин вони зустрінуться, якщо відстань між містами становить 450 км?

Вносимо зміни в короткий запис прямої задачі; з'ясовуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі: перша дія не змінюється — знаходимо, на скільки змінюється (скорочується) відстань між тілами за одиницю часу. Отже, ключ до розв'язання задачі на знаходження часу той самий, що й для задач на знаходження відстані та швидкості — на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу. Причому її числове значення знаходять так само, як і в задачах на знаходження відстані, — додаванням числових значень шляху, який долає кожне тіло за одиницю часу. Знаючи шлях, на який повинні наблизитися тіла за весь час спільного руху, та знаючи, на скільки вони наближаються один до одного за одиницю часу, можна дізнатися, скільки разів вони повинні здійснити наближення, щоб зустрітися, — про час зустрічі. Отже, змінюється друга дія — у цій задачі ми знаходимо час дією ділення.

Розв'язання:

1) $90+60=150$ (км) — на стільки скорочується відстань між автобусами за кожну годину;
2) $450:150=3$ — стільки годин рухалися до моменту зустрічі автобуси.

Відповідь: за 3 год автобуси зустрілися.

На відміну від задач на знаходження відстані та на знаходження швидкості при одночасному русі в різних напрямках, задачі на знаходження часу руху розв'язують лише одним — другим — способом, коли розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного.

Зміна напрямку руху — тіла рухаються в протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

За умовою попередньої задачі тіла зустрілися; продовжимо цю задачу — припустимо, що тіла продовжили рух, але в протилежних напрямках. Учні вносять зміни в короткий запис попередньої задачі та формулюють одержану задачу. З'ясовуємо, чим відрізняються ці задачі і як ця зміна вплине на розв'язання одержаної задачі: змінюються пояснення до арифметичних дій; узагальнюємо план розв'язування задач на знаходження часу при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках.

ПАМ'ЯТКА

Задачі на одночасний рух двох тіл назустріч та в протилежних напрямках (шукане — час руху)

План розв'язування

1. Додаванням визначаю, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу.
2. Діленням визначаю, скільки разів у загальній відстані міститься число, на яке змінюється відстань між тілами за одиницю часу, і роблю висновок про час руху.

Заміна числових даних швидкостей руху тіл і відстані змінними (буквами) та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі.

Пропонується задача, у якій значення швидкостей руху тіл та відстані подані змінними (буквами) і шуканим є час їхнього спільного руху за умов двох варіантів руху — назустріч та в протилежних напрямках.

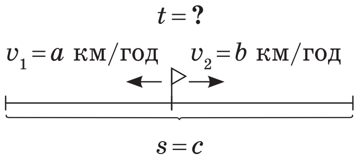
12. Розв'яжіть задачу.

Два пішоходи вирушили одночасно. Швидкість руху першого пішохода становить a км/год, а швидкість руху другого — b км/год. Знайдіть час руху пішоходів, якщо:

а) вони вирушили з одного міста в протилежних напрямках і віддалилися один від одного на c км;

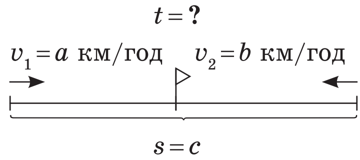
б) вони вирушили назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими становить c км.

Учні виконують рисунок до кожного варіанта руху та розв'язують обидві задачі.



I спосіб

—



II спосіб

$t = c : (a + b)$

Математичні моделі цих задач однакові. Отже, задачі на знаходження часу руху при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках розв'язуються лише одним способом — другим; тож запропоновану пам'ятку для знаходження відстані й швидкості руху (другим способом) можна узагальнити й для знаходження часу.

Зазначимо, що треба звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями, причому першою дією знаходимо, на скільки змінюється подоланий шлях між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані і часу ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості — дією ділення.

Докладніше про методику навчання розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках див. за посиланням.

При формуванні вміння розв'язувати задачі на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямках працюємо над задачами за пам'ятками і розв'язуємо задачі на знаходження відстані й швидкості руху двома способами, а часу — одним способом; складаємо обернені задачі. До задач ставимо творчі запитання, наприклад: «Чи могли тіла зустрітися на середині шляху? За яких умов? Якщо тіла після зустрічі продовжать свій рух, то яке тіло дістанеться кінцевого пункту раніше?»

З метою ускладнення задач на цьому етапі навчання застосовують такі прийоми:

- значення швидкостей пропонуються в різних одиницях вимірювання;
- вимагається дізнатися, який шлях буде між тілами за певний час при одночасному русі назустріч і за який час вони зустрінуться;

- у задачах на знаходження відстані і часу значення швидкості руху одного з тіл не дано, але дано різницеве відношення швидкостей руху обох тіл;
- одночасний рух у протилежних напрямках починається не з одного, а з різних пунктів;
- не дано час спільного руху, а сказано, о котрій годині розпочався рух та о котрій годині він закінчився;
- рух тіл розпочинається неодночасно.

Докладніше про методику роботи над задачами на рух на етапі формування вміння розв'язувати задачі див. за посиланням.

Про методику роботи над задачами на неодночасний рух див. за посиланням.

Методику зіставлення задач на рух та задач на спільну роботу див. за посиланням.

Методику роботи над задачами на рух в одному напрямку див. за посиланням.

Методику роботи над задачами на рух за течією та проти течії річки див. за посиланням.

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИКА АЛГЕБРАЇЧНОЇ ПРОПЕДЕВТИКИ В 3–4 КЛАСАХ

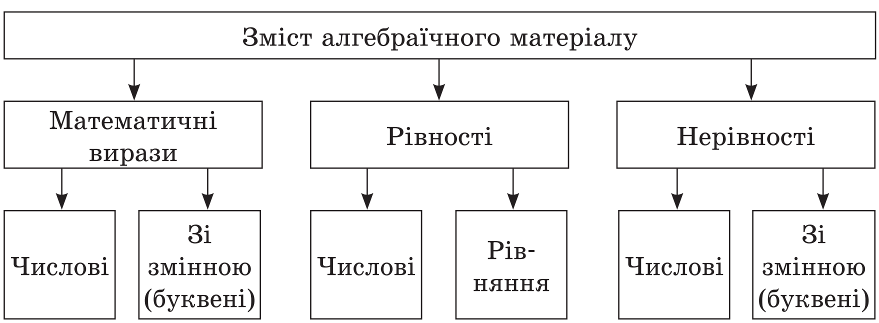
5.1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ, РІВНОСТІ, НЕРІВНОСТІ В 3–4 КЛАСАХ

Очікувані результати навчання здобувачів освіти див. за посиланням.

Мета вивчення алгебраїчного матеріалу в 3–4 класах полягає в глибшому розкритті арифметичних понять, у доведенні узагальнень учнів до високого рівня, а також у підготовці до подальшого засвоєння курсу алгебри.

Отже, вивчення елементів алгебри в початковому курсі математики тісно пов’язано з вивченням арифметичного матеріалу. Це виявляється, наприклад, у тому, що рівняння і нерівності розв’язуються без застосування алгебраїчного апарату (теорем про рівносильність рівнянь), а з використанням властивостей арифметичних дій на підставі взаємозв’язку між компонентами та результатами арифметичних дій.

Основними алгебраїчними поняттями є «рівність», «нерівність», «вираз», «рівняння». Означення цих понять у курсі математики початкової школи не дається. Учні засвоюють їх на рівні уявлень під час виконання спеціальних завдань.



ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Основними завданнями вчителя під час вивчення числових виразів у 3–4 класах є навчити учнів:

- читати та записувати числові вирази;
- знаходити значення числових виразів;
- виконувати тотожні перетворення виразів;

- порівнювати числові вирази;
- складати числовий вираз за текстом будь-якої простої або складеної задачі.

Математичний вираз — це запис, що складається з чисел та букв, які з'єднані знаками арифметичних дій та дужками, наприклад:

$3 \cdot 23 + 24 : 6$ $\quad a + 5 \cdot 12$ $\quad b : (11 - 6)$

Якщо запис складається тільки з чисел, які з'єднані знаками арифметичних дій та дужками, — це **числовий вираз**.

У 3 класі учні працюють з математичними виразами, які містять три і більше арифметичні дії, наприклад:

$32 - 24 + 64 : 8$ $\quad 8 \cdot 9 - (42 - 7)$ $\quad 8 \cdot 2 - 6 : 2$

$56 : 8 + 64 : 8$ $\quad 24 - 18 : 3 + 7$ $\quad 3 \cdot 4 + 8 \cdot 9$

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ВИРАЗІВ

У 2 класі учні ознайомилися з математичними виразами, які містили арифметичні дії різних ступенів, а також виразами, у яких числа поєднані знаками арифметичних дій множення та ділення; знаходили значення виразів із дужками, але правила порядку виконання арифметичних дій не були введені.

З правилами порядку виконання арифметичних дій у математичних виразах учні ознайомлюються в 3 класі. Зазвичай це відбувається під час вивчення теми «Таблиці множення та ділення».

1. Якщо у виразі без дужок є тільки арифметичні дії додавання та віднімання, тоді їх виконують у тому порядку, у якому вони записані: $40 - 12 + 8 = 36$; $57 - 9 - 20 = 28$.
2. Якщо у виразі без дужок є тільки арифметичні дії множення та ділення, тоді їх виконують у тому порядку, у якому вони записані: $24 : 4 : 3 = 2$; $12 : 3 \cdot 2 = 8$; $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$.
3. Якщо у виразі немає дужок, тоді спочатку виконують послідовно множення та ділення, а потім — додавання та віднімання: $24 - 8 : 4 = 22$; $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$; $20 + 4 \cdot 7 = 48$.
4. Якщо у виразі є дужки, тоді спочатку виконують дії в дужках, а потім — поза ними: $35 - (41 - 24) = 18$; $36 : (13 - 9) = 9$.

Учитель звертає увагу учнів на те, що дуже важливо дотримуватися цих правил при обчисленнях, інакше можна одержати неправильний результат. Наприклад:

$20-15:5$.

- Якщо дотримуватися правил порядку виконання арифметичних дій, одержимо: 1) $15:5=3$, 2) $20-3=17$, тому $20-15:5=17$ — істинно;
- якщо не дотримуватися правил порядку виконання арифметичних дій, одержимо: 1) $20-15=5$, 2) $5:5=1$, $20-15:5=1$ — хибно.

Для закріплення правил порядку виконання арифметичних дій у виразах учням пропонуються такі завдання.

1. Обчисліть вирази з поясненням правил порядку виконання арифметичних дій.
2. Поясніть помилки в порядку виконання арифметичних дій (завдання на критику помилок).
3. Використовуючи дужки, змініть порядок виконання арифметичних дій: $5+4\cdot3$. $\left[(5+4)\cdot3\right]$.
4. Знайдіть значення виразів по діях (завдання на використання всіх правил порядку виконання арифметичних дій).
5. Знайдіть значення виразів, у яких останньою виконується арифметична дія віднімання (додавання тощо).

$8-8:2$	$32+(17-8)$	$64:8-8$
$(70-7):7$	$32-(17+8)$	$(64-8):8$

6. У кожному виразі поставте дужки так, щоб його значення збільшилося.

$1+8\cdot4$	$24-18:2+7$	$24:8-2$
$32:8-4$	$42-24:3+3$	$7\cdot3+6$

Розглянемо міркування під час розв'язання завдання 6.

Яка арифметична дія виконується останньою в першому виразі? [$1+8\cdot4$ — останньою виконується дія додавання.] Яка арифметична дія виконуватиметься останньою, якщо за допомогою дужок змінити порядок виконання арифметичних дій? [$(1+8)\cdot4$ — останньою повинна бути арифметична дія множення.] Як повинен змінитися один із компонентів, щоб значення виразу збільшилося? [Добуток збільшується, якщо один із множників збільшується.] Як за допомогою дужок змінити цей компонент? [Можна збільшити перший множник, якщо взяти в дужки суму чисел 1 і 8: $(1+8)\cdot4$.]

Так можна міркувати при обчисленні значень виразів у стовпчиках 1 і 3.

$(1+8)\cdot 4$ $\quad$ $24:(8-2)$

$32:(8-4)$ $\quad$ $7\cdot(3+6)$

Міркування при обчисленні значень виразів у стовпчику 2 можуть бути такими.

Яка арифметична дія виконується останньою у першому виразі? [$24-18:2+7$ — останньою виконується дія додавання.] Яка арифметична дія буде виконуватися останньою, якщо змінити порядок виконання арифметичних дій? [Або віднімання, або ділення.] При якій арифметичній дії з двох визначених одержуємо більший результат? [При відніманні зазвичай одержуємо більший результат, ніж при діленні.] Отже, яка арифметична дія повинна виконуватися останньою? [Віднімання.] Як потрібно змінити один із компонентів арифметичної дії, щоб результат збільшився? [Щоб різниця збільшилася, потрібно, щоб або зменшуване збільшилося, або від'ємник зменшився.] Який компонент можна змінити? [Можна змінити від'ємник. Від'ємник повинен зменшитися.] Як можна цього досягти? [Щоб від'ємник $18:2+7$ зменшився, потрібно, щоб останньою виконувалася арифметична дія ділення і щоб значення частки було меншим. Значення частки буде меншим, якщо дільник збільшиться. Маємо: $18:(2+7)$.] Запишіть відповідь. $\left[24-18:(2+7)\right]$

Так можна міркувати і при обчисленні значення другого виразу у стовпчику 2.

$42-24:(3+3)$

7. Відновіть пропущені знаки арифметичних дій в істинних рівностях.

$3\bigcirc 6\bigcirc 2=9$ $\quad$ $25\bigcirc 5\bigcirc 4\bigcirc 2=22$

$9\bigcirc 3\bigcirc 9=36$ $\quad$ $9\bigcirc 3\bigcirc 6\bigcirc 2=6$

При обчисленні виразів у стовпчику 1 можна міркувати так.

Число, яке записано після знака «=», подайте у вигляді добутку (частки, суми або різниці). [$3\bigcirc 6\bigcirc 2=9$, $9=3\cdot 3$.] Чи є серед чисел, що записані ліворуч від знака «=», один із компонентів? [Так, це перший множник — число 3.] Подумайте, яку арифметичну дію потрібно виконати між двома іншими числами, щоб одержати другий компонент арифметичної дії. [Потрібно виконати ділення — $6:2=3$.] Запишіть відповідь. [$3\cdot(6:2)=9$ або $3\cdot 6:2=9$.]

Міркуючи аналогічно, одержуємо результат другого виразу у стовпчику 1.

$36 = 9 \cdot 4$, $36 = 9 \cdot 3 + 9$. Є перший множник 9. За допомогою чисел 3 і 9 або 9 і 3 не можна одержати другий множник 4. Тому користуємося поданням числа 36 у вигляді суми добутку і числа: $9 \cdot 3 + 9$. Бачимо, що перший доданок можна одержати, якщо 9 помножити на 3, а другий доданок — це число 9; $9 \cdot 3 + 9 = 36$.

Розглянемо міркування під час знаходження значень виразів у стовпчику 2.

Число, яке записано після знака «=», подайте у вигляді добутку (частки, суми або різниці). [$25 \bigcirc 5 \bigcirc 4 \bigcirc 2 = 22$, $22 = 20 + 2$.] Чи є серед чисел, які записані ліворуч від знака «=», один із компонентів? [Так, є другий доданок 2.] Подумайте, як одержати інший компонент арифметичної дії. [$25 \bigcirc 5 \bigcirc 4 = 20$, $25 : 5 \cdot 4 = 20$.] Запишіть відповідь. [$25 : 5 \cdot 4 + 2 = 22$]

Аналогічно: $9 \bigcirc 3 \bigcirc 6 \bigcirc 2 = 6$.

$6 = 3 \cdot 2$, $6 = 3 + 3$. Є другий множник 2. Одержати рівність $9 \bigcirc 3 \bigcirc 6 = 3$ неможливо. Тому розглянемо суму: $6 = 3 + 3$. Як з чисел $9 \bigcirc 3$ одержати число 3? [Дією ділення.] Як з чисел $6 \bigcirc 2$ одержати число 3? [Дією ділення.] Запишіть відповідь. [$9 : 3 + 6 : 2 = 6$]

8. Розставте дужки так, щоб утворилися істинні рівності.

$12 : 2 + 2 \cdot 2 = 6$ $\quad 32 : 8 - 2 \cdot 2 = 4$ $\quad 72 - 24 : 6 + 2 = 66$

$32 : 8 - 2 \cdot 2 = 8$ $\quad 12 : 2 + 2 \cdot 2 = 2$

Розглянемо першу рівність: $12 : 2 + 2 \cdot 2 = 6$. Число 6 можна подати у вигляді: $6 = 3 \cdot 2$, $6 = 4 + 2$. У вигляді суми подавати число 6 не можна, тому що $12 : 2 \neq 4$. Отже, беремо за основу добуток: $6 = 3 \cdot 2$. Ми маємо другий множник, число 2. Подумайте, як одержати перший множник — число 3. [$12 : 2 + 2$. Потрібно розставити дужки так, щоб одержати число 3. $12 : (2 + 2)$.] Запишіть відповідь. [$12 : (2 + 2) \cdot 2 = 6$]

Аналогічно міркуємо при обчисленні другого виразу.

Число 2 можна подати у вигляді: $2 = 1 \cdot 2$, $12 : 6 = 2$. У вигляді добутку подавати число 2 не можна, тому що $12 : 2 + 2 \neq 1$. Отже, беремо за основу частку: $12 : 6 = 2$. Є ділене 12. Потрібно подумати, як із решти чисел і знаків арифметичних дій одержати число 6. [$2 + 2 \cdot 2 = 6$.] Запишіть відповідь. [$12 : (2 + 2 \cdot 2) = 2$]

Аналогічно:

$32 : 8 - 2 \cdot 2 = 4 \longrightarrow (32 : 8 - 2) \cdot 2 = 4$

$32 : 8 - 2 \cdot 2 = 8 \longrightarrow 32 : (8 - 2 \cdot 2) = 8$

$72 - 24 : 6 + 2 = 66 \longrightarrow 72 - (24 : 6 + 2) = 66$

ПОРІВНЯННЯ ЧИСЛОВИХ ВИРАЗІВ

Вирази порівнюють декількома способами:

1) обчисленням (знаходимо значення кожного виразу і порівнюємо одержані результати: більший той вираз, значення якого більше, і навпаки: якщо значення виразів рівні, то й вирази рівні);
2) логічним способом (порівнюємо вирази, аналізуючи їх: $3+5 \bigcirc 3+4$ — обидва вирази — суми; в обох сумах однакові перші доданки, отже, більший той вираз, у якого другий доданок більший: 5 більше за 4, тому $3+5$ більше за $3+4$);
3) перетворенням одного з виразів і порівнянням виразів другим способом: $3 \cdot 2+3 \bigcirc 3 \cdot 4$.

У 3 класі учням пропонується порівняти вирази і числа, причому вирази містять кілька арифметичних дій, наприклад: $56:7-7 \bigcirc 5$.

Зрозуміло, що порівняння цього виразу і числа відбувається першим способом: знаходимо значення виразу: $56:7-7=1$; порівнюємо одержане число з даним: $1<5$; робимо висновок: $56:7-7<5$.

Цікавим є завдання підібрати такі числа, щоб одержати істинні нерівності, наприклад:

$5 \cdot 8 > 5 \cdot \square$; $4 \cdot 7 < \square \cdot 8$.

Під час виконання цього завдання потрібно застосувати другий спосіб порівняння виразів.

Розглянемо першу нерівність. $5 \cdot 8 > 5 \cdot \square$. Порівнюємо вирази, записані ліворуч та праворуч; визначаємо, що в них спільне [обидва вирази — добутки]; порівнюємо компоненти цих виразів [у них однакові перші множники; другі множники повинні бути різними, тому що значення першого виразу більше]; визначаємо, як потрібно змінити один із компонентів, щоб значення виразу зменшилося (збільшилося) [щоб добуток зменшився, потрібно, щоб і другий множник зменшився; отже, другим множником буде число, яке менше від 8, — це 7, або 6, або 5, або 4, або 3, або 2, або 1, або 0].

Розглянемо другу нерівність. $4 \cdot 7 < \square \cdot 8$. Порівняйте вирази, записані ліворуч та праворуч. Що в них спільне? [Обидва вирази — добутки.] Порівняйте компоненти цих виразів. [У них різні другі множники, причому більше число містить вираз, значення якого більше. Тому, якщо ці вирази міститимуть однакові перші множники, то значення другого виразу буде все одно більшим! Отже, $4 \cdot 7 < 4 \cdot 8$.]

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ

Тотожні перетворення виразів — це заміна даного виразу іншим, значення якого дорівнює значенню даного (зазначимо, що це означення правильне лише для чисел, які вивчаються в курсі початкової школи).

Тотожні перетворення виразів у 3 класі здійснюються на підставі законів арифметичних дій та їхніх наслідків:

1) переставний закон додавання та множення;
2) сполучний закон додавання та множення;
3) правил:

- віднімання суми від числа, віднімання числа від суми;

$$a-(b+c)=\begin{cases}(a-b)-c\\(a-c)-b\end{cases}\qquad (a+b)-c=\begin{cases}(a-c)+b\\(b-c)+a\end{cases}$$

- множення числа на суму, множення суми на число;

$$\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}\qquad \boxed{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c}$$

- ділення суми на число, ділення числа на добуток тощо.

$$\boxed{(a+b):c=a:c+b:c}\qquad a:(b\cdot c)=\begin{cases}(a:b):c\\(a:c):b\end{cases}$$

Вивчаючи властивості арифметичних дій, учні впевнюються, що в деяких виразах можна виконувати дії по-різному, але значення виразів при цьому не змінюється. Далі знання цих властивостей арифметичних дій учні застосовують для перетворення виразів на тотожні.

$$52:4=(40+12):4=40:4+12:4=10+3=13$$

Важливо, щоб учні не тільки пояснювали, на підставі якої властивості вони одержують наступний вираз, але й розуміли, що всі ці вирази поєднує знак «=», тому що вони мають однакові значення.

Учні 3 класу також виконують тотожні перетворення виразів не тільки на підставі властивостей арифметичних дій, але й на підставі конкретного змісту арифметичної дії множення.

$$3\cdot 4=3+3+3+3=12$$

У 3 класі учні роблять висновок: якщо у виразі з дужками дужки не впливають на порядок виконання арифметичних дій, то їх можна не ставити.

$18+(8:2)=18+8:2=22$

Цей висновок учні роблять при розв'язуванні задач за допомогою складання виразу та знаходження значення цього виразу по діях із поясненнями.

Зазначимо, що в 4 класі пропонуються завдання на знаходження значень виразів із дужками, у яких записаний вираз, що містить не одну, а дві арифметичні дії.

$18\cdot 20+(846-143\cdot 4)=634$

Учні повинні спочатку встановити порядок виконання арифметичних дій у дужках, а потім і порядок виконання решти арифметичних дій; виконати дії згідно зі встановленим порядком.

5.2. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННОЮ, РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННОЮ В 3–4 КЛАСАХ

ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННОЮ (БУКВЕНІ ВИРАЗИ)

Якщо вираз, крім чисел і знаків арифметичних дій, складається ще й із букв — це **вираз зі змінною**, або **буквений вираз**.

У процесі виконання завдань на знаходження значень виразів зі змінною в учнів формується розуміння змінної як букви у виразі, що може набувати деякої множини значень. В учнів має сформуватися чітке уявлення про те, що вираз зі змінною — буквою — не має певного значення, воно залежить від того, якого значення надають букві — змінній.

Вирази зі змінною було введено в 2 класі. Тому на початку навчального року доцільно актуалізувати знання учнів про вирази зі змінною. Докладніше див. за посиланням.

У 3 класі продовжується робота над виразами з однією змінною, а також вводяться вирази, які містять дві змінні.

Спочатку учні ознайомлюються з виразами зі змінною, які містять дві однакові змінні, і вчаться знаходити їхнє числове значення при заданому значенні змінної.

1. Знайдіть значення виразу зі змінною: $a+6\cdot a$, якщо $a=8$.

Знайти значення цього виразу можливо декількома способами.

I спосіб

Підставити значення змінної і знайти значення виразу: $a+6\cdot a$, якщо $a=8$, одержуємо: $8+6\cdot 8=8+48=56$.

У подальшому навчанні можна використовувати ще й інший спосіб знаходження значення виразу зі змінною.

II спосіб

Виконати тотожні перетворення виразу:

- переставити місцями доданки: $6\cdot a+a$;
- переставити місцями множники: $a\cdot 6+a$;
- використати конкретний зміст арифметичної дії множення: $a\cdot 7$;
- підставити значення змінної та знайти значення виразу: $8\cdot 7=56$.

Зазначимо, що цей спосіб можна запропонувати дітям під час вивчення таблиці множення числа 8. Тобто можна ще раз повернутися до вже розв'язаного виразу й показати інший спосіб розв'язування.

2. Знайдіть значення виразу: $a+a+a+a=a\cdot 4$, якщо $a=7$.

Учні вперше стикаються з тим, що змінна може бути однаковим доданком. Суму однакових доданків можна замінити добутком. Отже, спочатку виконано тотожне перетворення виразу зі змінною, а потім пропонується знайти значення одержаного виразу зі змінною. Це означає, що в подальших завданнях на знаходження значень виразів зі змінною, якщо можливо, спочатку слід виконувати тотожні перетворення, які спрощують вираз, а тільки потім знаходити числове значення виразу зі змінною при заданому значенні змінної.

Далі пропонуються завдання на знаходження значення виразу зі змінною, який містить дві різні змінні.

При вивченні множення та ділення в межах 1000 змінні широко застосовують для узагальнення правил множення та ділення з числами 1 і 0: пропонується знайти значення виразу зі змінною при заданому значенні змінної, використовуючи попередні правила, тобто виконуючи тотожні перетворення виразів зі змінною:

$1\cdot a$, якщо $a=8$ — одержуємо $1\cdot a=a=8$.

Загалом, у 3 класі новим є використання різних букв латинського алфавіту для позначення змінної; розгляд виразів, у яких змінна повторюється, та виразів із двома змінними.

Також учні ознайомлюються із задачами, які містять буквене дане, та вчаться складати буквений вираз до задачі. У початкових класах вміння розв'язувати ці задачі не входить до обов'язкового мінімуму, тому в тематичні роботи такі завдання не включаються. Задачі з буквеними даними за математичним змістом для учнів не нові. Такі задачі вони вже розв'язували, але з числовими даними. Однією з особливостей оформлення розв'язку задач із буквеними даними є те, що короткий запис варто поєднувати з розв'язанням задачі. Детальніше див. за посиланням.

ПРОСТІ РІВНЯННЯ

У 3 класі вводяться поняття: «рівняння», «розв'язати рівняння». Учні вчаться розв'язувати прості рівняння на знаходження невідомого компонента арифметичних дій додавання і віднімання, множення і ділення двома способами: підбором та на основі взаємозв'язку між результатом і компонентами арифметичної дії; вчаться доводити, що одержане число є розв'язком рівняння.

Ознайомлення з поняттям «рівняння» відбувається шляхом виконання системи завдань.

Знайдіть значення виразу зі змінною: $x+2$, якщо $x=4$.

Учні виконують це завдання усно, а вчитель оформлює розв'язання на дошці.

Розв'язання:

Якщо $x=4$, то $x+2=4+2=6$.

Після цього вчитель запитує, при якому значенні змінної x вираз зі змінною має значення 6.

Зважаючи на попереднє завдання, багато хто з учнів вже може відповісти на це запитання. Але нас цікавить насамперед, як варто міркувати під час виконання цього завдання.

Звичайно, можна підбирати числа і підставляти їх замість змінної у вираз; знаходити значення виразу, а потім порівнювати кожне з одержаних чисел із числом 6. Якщо одержимо істинну рівність, то це шукане значення змінної, тобто розв'язок виразу зі змінною. Однак такі міркування дуже довгі. Міркуємо, як відразу одержати розв'язок.

Записуємо: $x+2=6$. Запитуємо в учнів, що ми записали; чим відрізняється ця рівність від числових рівностей; чим відрізняється цей запис від буквеного виразу; що в них спільне.

Під час розв'язування рівняння будемо міркувати так.

Прочитайте рівність. Що невідомо? Як знайти невідомий доданок? Виконайте цю арифметичну дію. [$x=6-2$, $x=4$.] Перевіримо, чи буде рівність істинною при $x=4$. Для цього у вираз зі змінною замість змінної підставляємо знайдене числове значення змінної x. [$4+2$] Значення цього виразу повинне дорівнювати числу 6. Знаходимо значення виразу зі змінною при $x=4$. [$4+2=6$] Порівнюємо знайдене значення з числом, що стоїть праворуч від знака рівності. [$6=6$ — одержали істинну рівність.]

Робимо висновок: число 4 є розв'язком цього рівняння, тому що при підставленні одержаного значення змінної ми одержуємо істинну рівність.

Отже, ми розв'язали рівняння.

Розв'язок рівняння потрібно оформлювати так.

$x+2=6$
$x=6-2$
$x=4$

$4+2=6$
$6=6$
Відповідь: $x=4$

Поясніть, чому число 4 є розв'язком рівняння. Чим відрізняється це завдання від попереднього? [У попередньому завданні потрібно було знайти значення виразу при заданому значенні змінної, а в цьому завданні ми знаходили значення змінної при заданому значенні виразу.]

Скільки розв'язків може мати вираз зі змінною? [Багато, для кожного значення змінної.] Скільки розв'язків може мати рівняння? [Тільки одне, тому що тільки при єдиному значенні змінної рівність буде істинною.]

Рівняння — це рівність зі змінною — буквою.
Розв'язати рівняння — це означає знайти таке числове значення змінної, при якому рівність буде істинною.
Поняття «рівняння» має дві істотні ознаки:
1) це рівність;
2) містить змінну.

З метою закріплення одержаних учнями знань пропонуємо їм відповісти на запитання.

- Наведіть приклади числових виразів. Як знайти їх значення?
- Наведіть приклади числових рівностей. Що можна про них сказати? Вони істинні чи хибні?
- Наведіть приклади виразів зі змінною. Що потрібно задати, щоб знайти їх значення? Як знайти значення виразів зі змінною?
- Наведіть приклади рівностей, що містять змінну. Як вони називаються?
- Що означає розв'язати рівняння?

Перші рівняння, з якими ознайомлюються учні, називаються простими. До простих рівнянь належать рівняння на знаходження невідомого доданка, зменшуваного, від'ємника, множника, діленого та дільника.

$x-7=3$	$6-y=4$	$n\cdot 3=15$
$x=3+7$	$y=6-4$	$n=15:3$
$\underline{x=10}$	$\underline{y=2}$	$\underline{n=5}$
$10-7=3$	$6-2=4$	$5\cdot 3=15$
$3=3$	$4=4$	$15=15$
Відповідь: 10	*Відповідь:* 2	*Відповідь:* 5

Усі ці рівняння розв'язують способом на підставі взаємозв'язку між результатом та компонентами арифметичних дій за допомогою пам'ятки.

ПАМ'ЯТКА

Розв'язування простих рівнянь

1. Читаю рівняння з назвою компонентів арифметичної дії.
2. Визначаю, який компонент невідомий.
3. Згадую, як знайти невідомий компонент.
4. Виконую арифметичні дії та визначаю невідомий компонент.
5. Виконую перевірку: підставляю знайдене значення замість змінної; визначаю, чи буде при цьому рівність істинною.
6. Роблю висновок про корінь (розв'язок) рівняння.
7. Записую відповідь.

Але деякі рівняння пропонується учням розв'язати й *способом підбору*: у рівняння замість змінної почергово підставляються запропоновані значення; значення, при якому одержимо істинну числову рівність, і є розв'язком рівняння.

Додатково можна ознайомити учнів зі способом розв'язування рівнянь *на основі властивостей рівностей*. Розглянемо кілька прикладів.

$x - 7 = 3$

$\underline{x} - 7 = \underline{10} - 7$

$x = 10$

Відповідь: 10

Наводимо спосіб міркування під час розв'язування цього рівняння способом на основі властивостей рівностей.

У лівій частині рівняння записана різниця з від'ємником 7. Подамо праву частину рівняння у вигляді різниці з від'ємником 7. Від якого числа потрібно відняти 7, щоб одержати 3? [Це число 10.]

Порівнюємо дві різниці: Чим вони схожі? [У них однакові від'ємники.] Чим вони відрізняються? [Зменшуваними.] Зробіть узагальнювальний висновок. [Дві різниці з однаковими від'ємниками рівні тоді й тільки тоді, коли й зменшувані рівні.] Запишіть відповідь.

Розв'язуючи аналогічні рівняння й аналізуючи їх, учні узагальнюють спосіб розв'язування рівнянь на основі властивостей рівностей.

Запитуємо в учнів, коли можна застосовувати цей спосіб [якщо і праворуч, і ліворуч записані однакові математичні вирази, які містять однаковий компонент]; у чому він полягає [потрібно порівняти математичні вирази: якщо між однаковими математичними виразами, які містять спільний компонент, стоїть знак рівності, то й другий компонент у них теж однаковий].

Розглянемо ще один приклад рівняння, яке так само можна розв'язати зазначеним способом.

$40 + y = 44$

$40 + \underline{y} = 40 + \underline{4}$

$y = 4$

Відповідь: $y = 4$

Наводимо спосіб міркування під час розв'язування цього рівняння способом на основі властивостей рівностей.

Прочитайте ліву частину рівняння. Прочитайте праву частину рівняння. Що записано в лівій частині? [Сума чисел 40 та y.] Що записано в правій частині? [Число 44.] Що повинно бути в правій частині для того, щоб розв'язати це рівняння способом на основі властивостей рівностей? [Потрібно, щоб праворуч була сума.] Чи будь-яка сума нас задовольнить? [Ні. Потрібно, щоб була сума, що міститиме доданок 40.] Замініть праву частину таким самим виразом із заданим числовим компонентом. Замініть число 44 такою сумою. [$44 = 40 + 4$]

Отже, одержуємо рівняння: $40 + y = 40 + 4$.

Порівняйте вирази, записані ліворуч та праворуч. Зробіть узагальнювальний висновок. [Праворуч та ліворуч записані суми, які містять такий самий доданок — число 40; між цими сумами стоїть знак рівності, тому інший доданок також однаковий. Отже, $y = 4$.]

Запишіть відповідь.

Узагальнюємо міркування і формулюємо пам’ятку.

ПАМ’ЯТКА

Розв’язування простих рівнянь

Спосіб на основі властивостей рівностей

1. Читаю вираз, поданий у лівій частині рівняння. Визначаю відомий компонент.
2. Замінюю число у правій частині рівняння таким самим виразом, із тим самим відомим компонентом.
3. Зіставляю математичні вирази, записані у правій і лівій частинах рівняння. Якщо між однаковими математичними виразами, які містять спільний компонент, стоїть знак рівності, то й інший компонент у них також однаковий.
4. Записую відповідь.

Наприклад:

$6 - a = 4$	$b \cdot 3 = 15$	$k : 3 = 6$	$18 : p = 9$
$6 - \underline{a} = 6 - \underline{2}$	$\underline{b} \cdot 3 = \underline{5} \cdot 3$	$\underline{k} : 3 = \underline{18} : 3$	$18 : \underline{p} = 18 : \underline{2}$
$a = 2$	$b = 5$	$k = 18$	$p = 2$

Отже, у 3 класі рівняння розв’язуються трьома способами:

1) способом підбору;
2) способом на основі взаємозв’язку між результатом та компонентами арифметичних дій;
3) способом на основі властивостей рівностей.

Наведемо приклади.

Спосіб підбору	**Спосіб на основі взаємозв'язку між результатом і компонентами арифметичних дій**	**Спосіб на основі властивостей рівностей**
$6:x=2$. Припустимо, що $x=1$; $6:1=2$ — хибно; $x=2$; $6:2=2$ — хибно; $x=3$; $6:3=2$ — істинно. *Відповідь:* $x=3$. Зазначимо, що при розв'язуванні рівнянь способом підбору перевірка не потрібна.	$6:x=2$ $x=6:2$ $\underline{x=3}$ $6:3=2$ $2=2$ *Відповідь:* $x=3$	$6:x=2$ $6:\underline{x}=6:\underline{3}$ $x=3$ *Відповідь:* $x=3$ Зазначимо, що при розв'язуванні рівнянь способом на основі властивостей рівностей перевірка не потрібна.

УСКЛАДНЕНІ РІВНЯННЯ

У 3–4 класах над простими рівняннями працюємо згідно з відомими алгоритмами.

Після вивчення простих рівнянь вводяться рівняння складнішої структури.

- *I тип* — рівняння, у яких праворуч записано числовий вираз: $x+5=42-7$.
- *II тип* — рівняння, у яких один із компонентів поданий числовим виразом: $x-(12-7)=37$.

Ці рівняння розв'язуються за допомогою пам'ятки.

ПАМ'ЯТКА

Розв'язування ускладнених рівнянь

Рівняння, у яких один із компонентів — числовий вираз

Спосіб зведення до простого рівняння

1. З'ясовую, чим відрізняється подане рівняння від простого.
2. Замінюю числовий вираз його значенням.
3. Розв'язую одержане просте рівняння.
4. Виконую перевірку.

Зазначимо, що в 4 класі пропонуються рівняння, для розв'язування яких правило знаходження невідомого компонента застосовується двічі — це рівняння, у яких невідоме входить до складу одного з компонентів.

- *III тип* — рівняння, у яких невідоме входить до складу одного з компонентів: $(x-13)+40=65$.

Ці рівняння розв'язуються за допомогою пам'ятки.

ПАМ'ЯТКА

Розв'язування ускладнених рівнянь

Рівняння, у яких один із компонентів — вираз зі змінною

Спосіб зведення до простого рівняння

1. Визначаю, яка дія у виразі виконується останньою. Згадую, як називаються компоненти цієї арифметичної дії.
2. Визначаю, до складу якого компонента входить змінна, — це невідомий компонент арифметичної дії.
3. Згадую правило знаходження невідомого компонента арифметичної дії. Знаходжу невідомий компонент.
4. Розв'язую просте рівняння.
5. Виконую перевірку.

Наприклад:

$(n-13)+40=65$

$n-13=65-40$

$n-13=25$

$n=25+13$

$\underline{n=38}$

$(38-13)+40=65$

$25+40=65$

$65=65$

Відповідь: $x=38$

Розглянемо докладно методику ознайомлення учнів з ускладненими рівняннями.

Учням пропонується розв'язати рівняння $15-x=10$.

Запитуємо учнів, як називається вираз, який записаний ліворуч [різниця]; що невідомо [від'ємник]; як знайти невідомий від'ємник [щоб знайти невідомий від'ємник, слід від зменшуваного відняти значення різниці]. Пропонуємо учням виконати цю арифметичну дію [$x=15-10$]; записати відповідь [$x=5$]; виконати перевірку. [$15-5=10$; $10=10$. *Відповідь:* $x=5$.]

Поруч із цим рівнянням пропонуємо записати інше:

$15 - x = 10 \qquad (9+6) - x = 10.$

Просимо учнів прочитати це рівняння. [Якщо від суми чисел 9 і 6 відняти x, то одержимо 10.] Запитуємо, чим схожі ці рівняння [в обох рівняннях ліворуч записана різниця, в обох рівняннях невідомим є від'ємник, в обох рівняннях праворуч одне й те саме число 10]; чим вони відрізняються [у першому рівнянні зменшуване подано числом 15, а в другому виражено сумою чисел 9 і 6]; чи можна друге рівняння звести до вигляду першого [можна, якщо знайти значення виразу, який записано в зменшуваному]. Просимо знайти значення цього виразу. [$9+6=15$ — одержуємо: $15 - x = 10$.] Повідомляємо, що це рівняння ми вже розв'язали.

Запитуємо, який можна зробити висновок щодо розв'язування рівнянь, у яких один із компонентів поданий числовим виразом. [Це рівняння слід звести до простого рівняння, знайшовши значення виразу.] Просимо записати розв'язання.

$(9+6) - x = 10$
$15 - x = 10$
$x = 15 - 10$
$\underline{x = 5}$
$(9+6) - 5 = 10$
$15 - 5 = 10$
$10 = 10$
Відповідь: $x = 5$

Після виконання цього завдання пропонуємо учням розглянути іншу пару рівнянь: $a - 16 = 23$, $a - (30 - 14) = 23$. Запитуємо, чим схожі ці рівняння; чим вони відрізняються. [Схожі: в обох рівняннях ліворуч записана різниця, в обох невідомим є зменшуване. Відрізняються: у першому рівнянні від'ємник — число, а в другому від'ємник виражений різницею чисел 30 і 14.] Запитуємо, як звести друге рівняння до вигляду першого. [Потрібно знайти різницю чисел 30 і 14, яка записана у від'ємнику.] Пропонуємо учням розв'язати друге рівняння.

$a - (30 - 14) = 23$
$a - 16 = 23$
$a = 23 + 16$
$\underline{a = 39}$
$39 - (30 - 14) = 23$
$39 - 16 = 23$
$23 = 23$
Відповідь: $a = 39$

Після цього пропонуємо учням уважно розглянути подані рівняння і визначити, який компонент є невідомим у кожному з них.

$(40-25)+x=33$ $\quad b-76=90-76$ $\quad (52-11)-a=18$

[Невідомо: у першому рівнянні — другий доданок, у другому — зменшуване, у третьому — від'ємник.]

Просимо прочитати перше рівняння. [Перший доданок виражено різницею чисел 40 і 25, другий доданок — невідомий, сума — число 33.] Пропонуємо розв'язати це рівняння за пам'яткою.

1. З'ясовую, чим відрізняється подане рівняння від простого. [Один із компонентів (перший доданок) записано виразом — це різниця чисел 40 і 25.]
2. Замінюю числовий вираз його значенням. Одержую: $15+x=33$.
3. Розв'язую одержане просте рівняння: $x=33-15$; $x=18$.
4. Виконую перевірку.
   $(40-25)+18=33$
   $15+18=33$
   $33=33$
   Відповідь: $x=18$

Запитуємо, яке з рівнянь, що залишилися, схоже на перше рівняння; у якому рівнянні один із компонентів теж подано виразом. [Третє рівняння.] Пропонуємо учням розв'язати його, використовуючи пам'ятку.

Пропонуємо учням уважно розглянути друге рівняння; порівняти його з першим та третім рівняннями. Запитуємо, чим це рівняння від них відрізняється. [У першому та третьому рівняннях виразом поданий один із компонентів арифметичної дії, записаної у лівій частині рівняння, а в другому — у правій частині.] Запитуємо, що слід зробити в першу чергу, щоб розв'язати перше та третє рівняння [потрібно знайти значення виразу]; чи можливо так само розв'язати друге рівняння [можливо; якщо знайдемо значення виразу, який записано у правій частині, то одержимо просте рівняння]. Пропонуємо розв'язати друге рівняння.

На наступних уроках можна повернутися до другого рівняння й обговорити ще один спосіб його розв'язування. Міркуємо так. Праворуч і ліворуч записані різниці чисел: $b-76$ та $90-76$. Порівнюємо вирази: у них однакові від'ємники; між цими різницями стоїть знак «=», тому вони рівні. Якщо різниці рівні і в них однакові від'ємники, значить, у них рівні й зменшувані, тобто $b=90$.

На підставі виконання аналогічних завдань і їх аналізу учні узагальнюють логічний спосіб розв'язування рівнянь. Запитуємо, коли його можна застосовувати [якщо і праворуч, і ліворуч записані однакові математичні вирази, які містять однаковий компонент]; у чому він полягає [потрібно порівняти математичні вирази: якщо між однаковими математичними виразами, які містять однаковий компонент, стоїть знак рівності, то й другий компонент у них теж однаковий].

Зазначимо, що в 3 класі було запропоновано спосіб розв'язування простих рівнянь, який полягав у заміні правої частини рівняння таким самим виразом, який записаний у лівій частині, з однаковим одним із компонентів.

$x-5=90$

$x-5=95-5$

$x=95$

Подаємо спосіб міркування під час розв'язування цього рівняння.

Що записано в лівій частині рівняння? [Різниця з від'ємником 5.] Подайте праву частину рівняння у вигляді різниці з від'ємником 5. $[\,90=95-5\,]$ Порівняйте дві різниці. [У цих різницях однакові від'ємники; оскільки між цими різницями стоїть знак рівності й від'ємники у них однакові, то й зменшувані мають бути однаковими.] Зробіть висновок. [Дві різниці з однаковими від'ємниками рівні тоді й тільки тоді, коли зменшувані рівні.]

У цьому випадку перевірка не виконується. Відразу записуємо відповідь. Відповідь: $x=95$.

Розглянемо методику введення *рівнянь, у яких один із компонентів — вираз зі змінною*.

Пропонуємо учням розв'язати рівняння.

$(51:3)-y=9$

$17-y=9$

$y=17-9$

$y=8$

$\overline{(51:3)-8=9}$

$17-8=9$

$9=9$

Відповідь: $y=8$

Розглянемо міркування при розв'язуванні цього рівняння. Це рівняння відрізняється від простого тим, що в ньому зменшуване подано не числом, а числовим виразом — часткою чисел 51 і 3. Щоб звести це рівняння до вигляду простого, потрібно знайти значення частки цих чисел, — буде 17. Одержали просте рівняння: $17 - y = 9$. Щоб знайти невідомий від'ємник, потрібно від зменшуваного відняти різницю, — маємо 8. Виконуємо перевірку: підставляємо значення змінної в подане рівняння. Одержуємо істинну рівність.

Запитуємо в учнів, яка дія виконувалася останньою у виразі, записаному в лівій частині. [Віднімання.] Просимо прочитати вираз, записаний у лівій частині. [Зменшуване подано часткою чисел 51 і 3, а від'ємник — число y.] Зменшуване тут подано числовим виразом, значення якого досить легко обчислити.

Пропонуємо учням порівняти це рівняння з таким: $(51 : b) - 8 = 9$. Запитуємо, чим відрізняється це рівняння від попереднього. [Тут зменшуване не числовий вираз, а вираз зі змінною; його значення не можна знайти, не знаючи значення змінної.]

Повідомляємо, що в цьому рівнянні зменшуване — це невідомий компонент! Запитуємо, як знайти невідоме зменшуване. [Щоб знайти невідоме зменшуване, потрібно до значення різниці додати від'ємник.] Знаходимо число, якому дорівнює невідоме зменшуване, і одержуємо просте рівняння.

$$
\begin{aligned}
&(51 : b) - 8 = 9 \\
&51 : b = 9 + 8 \\
&51 : b = 17 \\
&b = 51 : 17 \\
&\underline{b = 3} \\
&(51 : 3) - 8 = 9 \\
&\quad 17 - 8 = 9 \\
&\qquad 9 = 9
\end{aligned}
$$

Отже, під час розв'язування рівнянь, у яких один із компонентів є виразом зі змінною, слід визначити, яка арифметична дія виконується останньою; згадати назви компонентів і визначити, до складу якого з компонентів входить змінна. Це невідомий компонент! Застосовуючи правило знаходження невідомого компонента, знаходимо його числове значення і одержуємо просте рівняння. Розв'язавши просте рівняння, знаходимо значення змінної. Якщо, підставивши значення змінної в подане рівняння, одержуємо істинну числову рівність, то знайдене значення змінної є розв'язком, або коренем, рівняння.

Методику розв'язування задач способом складання та розв'язування рівняння див. за посиланням.

НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННОЮ

Ознайомлення з нерівностями зі змінною відбувається в 3 класі.

Під час введення поняття про нерівності зі змінною пропонується бесіда.

- Як називаються записи $37-29$, $14:2+4$? [Це вирази.]
- Як називаються записи $a+25$, $12:b+7$? [Це буквені вирази, вирази зі змінною.]
- Чим відрізняється перша група виразів від другої? [Перша група виразів — це числові вирази, вони містять лише числа, які з'єднані знаками арифметичних дій; а друга група — це вирази зі змінною, вони містять, крім чисел, ще й букву — змінну.]
- Як називаються записи: $12<16$; $25-6>17$? [Це нерівності. Два числа або вирази, які поєднані знаками: >, <, =, — називаються нерівностями.]
- Як би ви назвали запис: $25-c>17$? [Це нерівність, яка містить букву — нерівність зі змінною.]

Ця буквена нерівність, або нерівність зі змінною, є істинною, якщо c набуває значень 1, або 2, або 3, або 4, або 5, або 6, або 7. Буквені нерівності, або нерівності зі змінною, ми будемо розв'язувати способом добору і способом випробовування обраних чисел — кожне з поданих чисел підставляється в нерівність замість змінної: якщо одержуємо істинну числову нерівність, то подане число є розв'язком; якщо одержуємо хибну числову нерівність, то це число не є розв'язком нерівності зі змінною.

1. І з чисел 6, 7, 8, 9, 10 випишіть ті, за яких нерівність $k+2>10$ є істинною.

Працювати над цим завданням ми будемо за пам'яткою.

ПАМ'ЯТКА

Розв'язування нерівностей зі змінною

Спосіб добору

1. Знаходжу значення виразу зі змінною при заданому значенні змінної.
2. Порівнюю числа.
3. Якщо числова нерівність є істинною, тоді це значення змінної є її коренем (розв'язком).

Розв'язання

$k+2>10$

1) Якщо $k=6$:
$6+2>10$ — хибно.
Число 6 не є розв'язком нерівності.
2) Якщо $k=7$:
$7+2>10$ — хибно.
Число 7 не є розв'язком нерівності.
3) Якщо $k=8$:
$8+2>10$ — хибно.
Число 8 не є розв'язком нерівності.
4) Якщо $k=9$:
$9+2>10$ — істинно.
Число 9 є розв'язком нерівності.
5) Якщо $k=10$:
$10+2>10$ — істинно.
Число 10 є розв'язком нерівності.

З цього випливає, що при $k>8$ нерівність $k+2>10$ буде істинною.

Відповідь: k=9, 10, ...

На перших етапах засвоєння вміння розв'язувати нерівності зі змінною слід запропонувати учням для розв'язування певну кількість завдань, причому кожний етап розв'язання згідно з пам'яткою записуємо в зошит; далі міркуємо усно, записуючи лише відповідь.

2. Знайдіть два таких значення k, за яких нерівність $k\cdot 7>40$ буде істинною.

Виконуючи це завдання, учні самостійно повинні підібрати числа, які слід випробувати, користуючись пам'яткою. Підбір значень змінної k здійснюється на підставі знання таблиці множення числа 7. Учням пропонується назвати добутки з таблиці множення числа 7, які більші за число 40 (це 42, 49, 56, 63, 70); встановити, множенням яких чисел на 7 вони одержані (6, 7, 8, 9, 10 відповідно); перевірити і довести, що ці числа є розв'язками поданої нерівності (за пам'яткою).

Якщо $k>5$, то нерівність $k\cdot 7>40$ є істинною.

Відповідь: k=6, 7, 8, 9, ...

3. Для кожної нерівності доберіть два таких значення змінної a, за яких нерівності будуть істинними: $20-a>15$; $a\cdot 4<36$; $a:8>4$.

Під час розв'язування цих нерівностей можна запропонувати учням раціональний спосіб добору змінної в нерівності (спосіб зведення до рівняння).

ПАМ'ЯТКА

Розв'язування нерівностей зі змінною

Раціональний спосіб добору розв'язків нерівностей зі змінною (спосіб зведення до рівняння)

1. Перетворюю нерівність на рівняння; розв'язую рівняння.
2. Записую визначене число — розв'язок рівняння — та записую його «сусідів».
3. Підставляю в нерівність число, $\frac{\text{попереднє}}{\text{наступне}}$ до визначеного.

   Якщо одержую істинну нерівність, то розв'язками є числа, розташовані $\frac{\text{до}}{\text{після}}$ визначеного числа. Якщо одержую хибну нерівність, то розв'язками є числа, розташовані $\frac{\text{після}}{\text{до}}$ визначеного числа.

Наприклад: $20 - a > 15$

1) $20 - a = 15$

   $a = 20 - 15$

   $a = 5$;
2) $\overleftarrow{\ldots}$ 4, $\underline{5}$, 6, ...;
3) $20 - 4 > 15$

   $16 > 15$ — істинно, тому число 4 є розв'язком;
4) 4, 3, 2, 1, 0.

Відповідь: $a = 4, 3, 2, 1, 0$.

$a \cdot 4 < 36$

1) $a \cdot 4 = 36$

   $a = 36 : 4$

   $a = 9$;
2) $\overleftarrow{\ldots}$ 8, $\underline{9}$, 10, ...
3) $8 \cdot 4 < 36$

   $32 < 36$ — істинно, тому число 8 є розв'язком;
4) 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

Відповідь: $a = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$.

$a:8>4$

1) $a:8=4$
   $a=4\cdot8$
   $a=32$;
2) виписуємо з таблиці ділення на 8 ділені, що менші від 32 і більші за 32: ... 24, <u>32</u>, 40, $\overrightarrow{...}$
3) $40:8>4$
   $5>4$ — істинно, тому число 40 є розв'язком;
4) виписую з таблиці ділення на 8 усі ділені, починаючи з 40: 40, 48, 56, 64, 72, 80.

Відповідь: $a=40$, 48, 56, 64, 72, 80.

Третій спосіб розв'язування нерівностей зі змінною полягає в залежності між результатом і компонентами арифметичних дій.

4. Розв'яжіть нерівності.

$25-b>20$ $\quad x\cdot70<280$ $\quad x+40<45$ $\quad 120:x>24$

Наводимо міркування під час розв'язування першої нерівності способом на основі залежності між результатом і компонентами арифметичних дій.

Прочитайте ліву частину нерівності. Прочитайте праву частину нерівності. Подайте праву частину у вигляді різниці. Що істотного повинно бути в цій різниці? [Зменшуване — число 25.] Замінюємо праву частину нерівності різницею зі зменшуваним 25. [$20=25-5$] У такий спосіб одержуємо: $\underline{25}-b>\underline{25}-5$. Порівняйте дві різниці з однаковими зменшуваними. [У цих різницях однакові зменшувані, а відрізняються вони від'ємниками. Різниця в лівій частині більша за різницю в правій частині.] Згадайте, у яких випадках різниця збільшується при зміні від'ємника. [Різниця збільшується, якщо від'ємник зменшується.] Який висновок можна зробити? [Із двох різниць з однаковими зменшуваними більша та, у якій від'ємник менший.] Якщо від'ємник повинен бути меншим, то яких значень набуває змінна b? [$b<5$. Відповідь: 0, 1, 2, 3, 4.]

Наводимо міркування під час розв'язування другої нерівності.

Подаємо праву частину нерівності, число 280, як добуток двох чисел із другим множником 70: $280=4\cdot70$. Одержуємо нерівність: $x\cdot70<4\cdot70$. Порівнюємо добутки, записані в правій та лівій частинах. Згадуємо взаємозв'язок між значенням добутку і множниками: значення добутку зменшується, якщо множник зменшується. З двох добутків з однаковим другим множником менший той, у якого перший множник менший. Робимо висновок: $x < 4$. Відповідь: 0, 1, 2, 3.

Зразок запису в зошиті.

$x \cdot 70 < 280$
$\underline{x} \cdot 70 < \underline{4} \cdot 70$
$x < 4$
Відповідь: 0; 1; 2; 3.

Наводимо алгоритм розв'язування третьої нерівності.

1) Подаю праву частину, число 45, як суму з другим доданком 40: $45 = 5 + 40$.	$\underline{x} + 40 < \underline{5} + 40$
2) Порівнюю суми. Згадую взаємозв'язок значення суми і доданка: сума зменшується, якщо доданок зменшується. Отже, із двох сум з однаковими другими доданками менша та, у якій перший доданок менший.	
3) Роблю висновок.	$x < 5$ *Відповідь*: 0; 1; 2; 3; 4.

Наводимо алгоритм розв'язування четвертої нерівності.

1) Подаю праву частину, число 24, у вигляді частки з діленим 120. $24 = 120 : 5$	$120 : \underline{x} > 120 : \underline{5}$
2) Порівнюю частки. Згадую залежність між значенням частки та діленим. Частка збільшується, якщо дільник зменшується. З двох часток з однаковими діленими більша та, у якій дільник менший.	
3) Роблю висновок.	$x < 5$ *Відповідь:* 0; 1; 2; 3; 4.

Отже, нерівності зі змінною розв'язуються трьома способами:
1) способом добору;
2) способом зведення до рівняння;
3) способом на підставі взаємозв'язку між результатом і компонентами арифметичних дій.

Наведемо приклад розв'язування нерівності кожним із цих способів.

Спосіб добору	**Спосіб зведення до рівняння**	**Спосіб на основі взаємозв'язку між результатом і компонентами арифметичних дій**
$a:8>4$ Згадуємо ділені з таблиці ділення на 8 — це 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72. Припустимо, що $a=8$; $8:8>4$ — хибно; $a=16$; $16:8>4$ — хибно; $a=24$; $24:8>4$ — хибно; $a=32$; $32:8>4$ — хибно; $a=40$; $40:8>4$ — істинно. Якщо $a>32$, то нерівність $a:8>4$ є істинною. *Відповідь*: a=40, 48, 56, 64, 72, ...	$a:8>4$ 1) $a:8=4$ $a=4\cdot 8$ $a=32$ $\leftarrow \qquad \rightarrow$ 2) ... 24, 32, 40, ... 3) $24:8>4$ — хибно; $40:8>4$ — істинно, тому число 40 є розв'язком; 4) 40, 48, 56, 72, ... *Відповідь:* a=40, 48, 56, 72, ...	$a:8>4$ $\underline{a}:8>\underline{32}:8$ Із двох часток з однаковими дільниками більша та, у якій ділене більше. *Відповідь:* a=40, 48, 56, 72, ...

Про розв'язування в 4 класі нерівностей зі змінною трьома способами див. за посиланням.

Зазначимо, що спосіб добору при розв'язуванні рівнянь і нерівностей застосовується тоді, коли задана множина чисел і з них треба обрати ті, для яких рівність або нерівність буде істинною. Якщо такого набору чисел немає, то краще розв'язувати нерівність другим або третім способом.

5. За яких значень змінної b нерівність $25-b>20$ буде істинною?

Розв'язувати нерівність будемо другим способом.

Зводимо нерівність до рівняння. Визначаємо, за якого значення змінної одержимо істинну рівність.

$25 - b = 20$

$b = 25 - 20$

$b = 5$

Записуємо одержане число, підкреслюємо його і записуємо його «сусідів»:

$\leftarrow \qquad \rightarrow$

…, 4, 5, 6, …

Підставляємо число, попереднє до знайденого, і встановлюємо, чи є воно розв'язком нерівності.

Якщо $b = 4$, то $25 - 4 > 20$ — істинно.

Робимо висновок: якщо нерівність є істинною, то виписуємо декілька чисел, які при рахунку називаються раніше від знайденого числа.

Відповідь: $b < 5$; $b = 4, 3, 2, 1, 0$.

9. Знайдіть найбільше натуральне значення x, яке задовольняє нерівність $200 - x > 42$.

Це завдання будемо розв'язувати третім способом.

1)	Подаю праву частину, число 42, як різницю зі зменшуваним 200: $42 = 200 - 158$.	$200 - \underline{x} > 200 - \underline{158}$
2)	Порівнюю різниці. Згадую зв'язок значення різниці і від'ємника: значення різниці збільшується, якщо від'ємник зменшується. Отже, із двох різниць з однаковими зменшуваними більша та, у якій від'ємник менший.	
3)	Роблю висновок.	$x < 158$ *Відповідь:* 0, 1, 2, 3, 4, ..., 157. Найбільше значення x, за якого нерівність буде істинною, — це число 157.

РОЗДІЛ 6. МЕТОДИКА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОПЕДЕВТИКИ В 3–4 КЛАСАХ

Методику узагальнення і систематизації знань учнів щодо геометричного матеріалу на початку навчального року див. за посиланням.

Геометрична фігура — це множина точок площини. У 3 класі вивчаються не нові геометричні фігури, а розглядаються лише ті, що були введені в попередніх класах: точка; пряма та крива лінії; відрізок; ламана; многокутники: трикутник, чотирикутник (зокрема, прямокутник і квадрат), п'ятикутник тощо; коло і круг.

У 3–4 класах учні креслять відрізки і вимірюють їхні довжини, а також довжину ламаної лінії; визначають периметр многокутника, зокрема прямокутника і квадрата; знаходять сторони квадрата за його периметром; будують прямокутники і квадрати на папері в клітинку за даними довжинами їхніх сторін.

Засвоєння геометричного матеріалу відбувається головним чином під час виконання практичних робіт (вимірювання, креслення та моделювання) і розв'язування задач, а не в результаті вивчення теорії.

Класифікацію задач геометричного змісту і приклади задач кожної групи див. за посиланням.

ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ВЕЛИЧИНИ

У 4 класі узагальнюється та систематизується геометричний матеріал, який вивчався в 1–3 класах; доповнюються та узагальнюються знання учнів про властивості геометричних фігур, а також вивчаються нові геометричні фігури.

Первинними поняттями в геометрії є *точка*, *пряма*, *площина*. Ці поняття вводяться без означення (про них кажуть, що це неозначувані поняття), лише спираючись на досвід дитини. Усі інші поняття визначаються через первинні або ті, що були означені раніше.

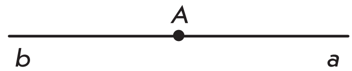
Розглянемо приклади.

Відрізок — це частина прямої, яка складається з усіх точок прямої, що лежать між двома даними точками на прямій, і цих точок. Ці точки називають *кінцями відрізка*.

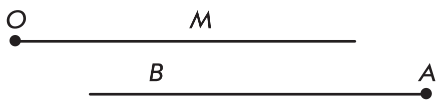
Інакше: **відрізок** — це частина прямої, яка обмежена двома точками, із цими точками включно.

Позначаємо: AB.

Промінь — це частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на прямій точки, і цієї точки. Ця точка — це *початок променя*.



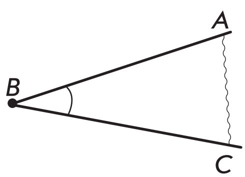
На малюнку точка A розбила пряму на два промені a і b, які мають спільний початок.



На рисунку зображено два промені з початками в точках O і A.

Позначаємо: OM, AB.

Кут — це фігура, яка складається з точки — *вершини кута* — та двох різних променів, що виходять з цієї точки, — *сторін кута*.

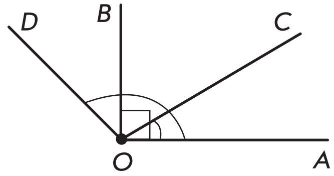


Кут можна позначати однією буквою, яка позначає вершину кута: $\angle B$, або трьома буквами, тоді позначення вершини ставиться в середині: $\angle ABC$.

За величиною кути поділяються на *прямі*, *гострі* й *тупі*.

Як відомо, поняття про *прямий кут* учні одержують із практичного досвіду (при подвійному перегинанні аркуша паперу).

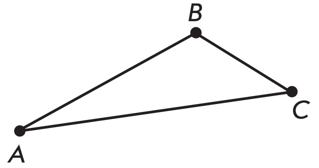
Гострий кут менший, ніж прямий. *Тупий кут* більший, ніж прямий.



На рисунку кут AOB — прямий, кут AOC — гострий, кут AOD — тупий.

Одна з найбільш відомих учням фігур — трикутник.

Трикутник — це геометрична фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які послідовно з’єднують ці точки.

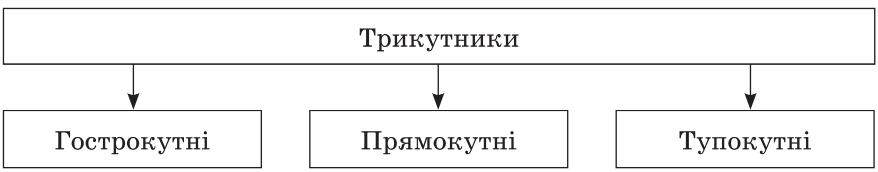


На рисунку точки A, B, C — *вершини трикутника*, відрізки AB, BC та AC — *сторони трикутника*.

Кожні дві сторони трикутника утворюють кут: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — *кути трикутника*.

Отже, елементи трикутника: вершини (точки A, B, C); сторони (відрізки AB, BC, AC, іноді довжини сторін позначають a, b, c); кути ($\angle A$, $\angle B$, $\angle C$).

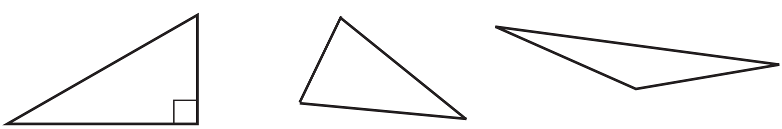
За величиною кутів трикутники можна класифікувати так.



У *гострокутному трикутнику* всі кути гострі. У *прямокутному трикутнику* один із кутів прямий, а два інші — гострі. У *тупокутному трикутнику* один із кутів тупий, а два інших — гострі.

У трикутнику не може бути більше ніж один прямий кут або більше ніж один тупий кут.

Позначте на рисунку вершини гострокутного трикутника: *A*, *B*, *C*; вершини прямокутного трикутника: *D*, *E*, *F*; вершини тупокутного трикутника: *K*, *L*, *M*.



За довжиною сторін трикутники класифікуються так.

Трикутники
- Різносторонні ($a > b > c$)
- Рівнобедрені ($a = b$)
  - Рівносторонні ($a = b = c$)
  - Рівнобедрені, але не рівносторонні ($a = b \neq c$)

Трикутник — це многокутник із найменшою кількістю сторін (кількість сторін — 3, вершин — 3, кутів — 3).

Учні знайомі також із чотирикутниками, п'ятикутниками, шестикутниками (кількість сторін — 4, 5, 6 відповідно).

Серед чотирикутників виділяються окремі види: прямокутники і квадрати (іноді учнів ознайомлюють ще й із ромбами).

Прямокутнику й квадрату дається означення через найближчий рід та видові ознаки.

Поняття = найближчий рід + видові ознаки

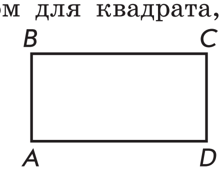
Прямокутник — це чотирикутник, у якого всі кути прямі.
(найближчий рід) (видова ознака)

Квадрат — це прямокутник, у якого всі сторони рівні.
(найближчий рід) (видова ознака)

Квадрат можна було б визначити й так: **квадрат** — це чотирикутник, у якого всі кути прямі і всі сторони рівні.

Але чотирикутник не є найближчим родом для квадрата, тому маємо збільшити кількість видових ознак.

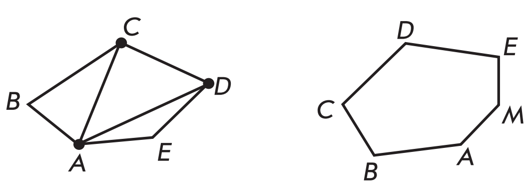
На рисунку $ABCD$ — прямокутник.



Властивості прямокутника: $AB = CD$, $BC = AD$ (протилежні сторони рівні).

Властивості прямокутника не згадують при його означенні.

На рисунку зображені многокутники: п'ятикутник і шестикутник.



Вершина A п'ятикутника сполучена відрізками із двома не сусідніми його вершинами C і D; AC і AD — діагоналі п'ятикутника.

Відрізок, який сполучає дві не сусідні вершини многокутника, називається **діагоналлю** многокутника.

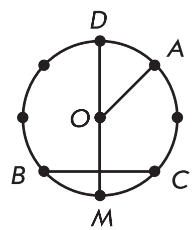
Запитуємо в учнів, скільки діагоналей можна провести в п'ятикутнику. Міркуємо так: кожну вершину п'ятикутника можна сполучити діагоналлю лише з двома вершинами (крім самої вершини та двох сусідніх вершин). Запитуємо, чи правильно, що всього діагоналей у п'ятикутнику: $2 \cdot 5 = 10$. [Ні, бо в такому випадку кожна діагональ ураховується двічі (наприклад, діагоналі AC і CA, але ж це той самий відрізок). Тому кількість діагоналей п'ятикутника: $10 : 2 = 5$. У п'ятикутнику 5 діагоналей]

Такі самі міркування дають змогу сказати, що в шестикутнику всього $((6 - 3) \cdot 6) : 2$ діагоналей, тобто 9 діагоналей.

У чотирикутнику всього 2 діагоналі. У прямокутнику та у квадраті діагоналі рівні.

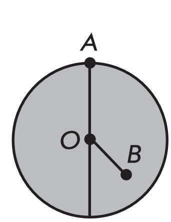
У трикутнику зовсім не можна провести діагоналі, бо для кожної його вершини дві інші вершини сусідні.

У початковій школі, крім фігур, обмежених ламаною лінією, вивчаються фігури, обмежені кривою лінією. Найпростішою з таких фігур є коло.



Візьмемо на площині довільну точку O та відкладемо від неї відрізки однакової довжини. Одержимо множину точок, які розташовані на рівних відстанях від вибраної точки O. Ця множина точок і складає фігуру, що називається **колом**.

Елементи кола: *центр* O, відрізок OA — *радіус кола*, відрізок BC, що сполучає дві будь-які точки кола — *хорда*; хорда DM, яка проходить через центр, — *діаметр кола*.



Коло обмежує частину площини, яка разом із колом утворює геометричну фігуру — **круг**.

Яку б точку цієї фігури ми не взяли, вона розташована від центра кола на відстані, яка дорівнює радіусу (OA) або менша від радіуса (OB). Точка B — внутрішня точка круга; точка A лежить на межі круга, якою є коло.

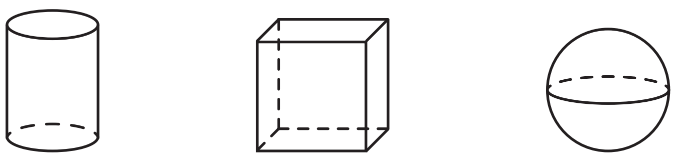
Означення сектора, сегмента і півкола див. за посиланням.

ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА

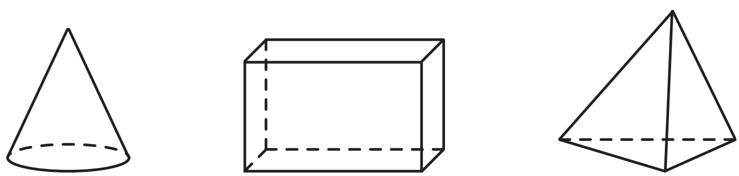
Круг, квадрат, прямокутник, трикутник, п’ятикутник — це *плоскі фігури*.

круг квадрат прямокутник трикутник п’ятикутник

Циліндр, куб, куля, конус, паралелепіпед, піраміда — це *геометричні тіла*, тобто *просторові фігури*.



циліндр куб куля



конус паралелепіпед трикутна піраміда

Знайдіть плоскі фігури в геометричних тілах.

1) У яких геометричних тілах є круг? [У циліндрі, кулі, конусі.]

2) У яких геометричних тілах є квадрат? [У кубі.]

3) У яких геометричних тілах є трикутник? [У піраміді.]

Методику формування вміння будувати геометричні фігури див. за посиланням.

Задачі на обчислення периметра і площі фігури див. за посиланням.

РОЗДІЛ 7. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ОСНОВНИХ ВЕЛИЧИН У 3–4 КЛАСАХ

7.1. ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 3 КЛАСУ

ДОВЖИНА

При вивченні нумерації чисел у межах 1000 узагальнюються знання учнів про довжину та одиниці її вимірювання: 1 см, 1 дм, 1 м; діти ознайомлюються з новими одиницями вимірювання: 1 мм, 1 км.

Уведення нових одиниць вимірювання довжини обумовлено необхідністю вимірювання довжин відрізків, які: більші за 1 м; менші від 1 см. Діти згадують, як вони обирали мірки для вимірювання довжини: кожний раз обирали більшу мірку, яка містила 10 менших мірок. Повторюємо одиниці вимірювання, починаючи з більшої.

1 м = 10 дм
1 дм = 10 см

1 дм у 10 разів менший від 1 м; 1 дм — це десята частина від 1 м. 1 см у 10 разів менший від 1 дм; 1 см — це десята частина від 1 дм.

Якщо можна брати мірки, більші за раніше уведені, то можна взяти й мірку, у 10 разів меншу від 1 см, — це 1 міліметр (мм). 1 мм — це десята частина від 1 см. 1 мм — довжина відрізка, який міститься між двома дрібними поділками на лінійці.

Наочне уявлення про 1 мм діти одержують, розглядаючи міліметрові поділки лінійки або аркуш міліметрового паперу. Учні відразу вдаються до вимірювань із точністю до 1 мм. При цьому звертається увага на те, щоб школярі «дивилися прямо» при суміщенні кінців відрізка з лінійкою.

З метою закріплення знань учнів співвідношення одиниць вимірювання довжини пропонуємо їм розв'язати такі завдання.

1. Замініть складені іменовані числа простими.

5 см 8 мм = $\square$ мм   7 дм 4 см = $\square$ см

6 м 8 дм = $\square$ дм   7 м 02 см = $\square$ см

2. Порівняйте іменовані числа.

4 м 60 см ◯ 4 м 06 см

2 дм 8 см ◯ 82 см

9 м 04 см ◯ 9 м 2 дм

Наступна одиниця вимірювання довжини, яка теж уводиться в цій темі, — це 1 кілометр (км). Необхідність введення нової одиниці вимірювання довжини випливає з необхідності вимірювати великі відстані, наприклад, відстані між містами. Тому обрали більшу одиницю вимірювання довжини, яка містить 1000 м, — це 1 км. Узагальнюємо знання дітей про одиниці вимірювання довжини.

Якщо учні вже ознайомились із записом частин, то можна скласти таку таблицю.

Довжина

$$1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см} = \frac{1}{100} \text{ дм} = \frac{1}{1000} \text{ м}$$

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ дм} = \frac{1}{100} \text{ м}$$

$$1 \text{ дм} = 10 \text{ см} = 100 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ м}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм} = \frac{1}{1000} \text{ км}$$

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$$

Наочне уявлення про 1 км учні одержують під час прогулянки. Діти проходять 1 км, рахуючи 2 кроки за 1 метр, отже, вони повинні пройти 2000 кроків.

Таблиця одиниць вимірювання довжини засвоюється під час виконання достатньої кількості завдань такого типу.

3. Скільки метрів в 1 км?

4. У скільки разів 1 м більший за 1 дм?

5. На скільки сантиметрів 1 м більший за 1 см?

6. Скільки метрів становить половина кілометра? чверть кілометра?

Крім того, продовжується робота з перетворення більших одиниць вимірювання довжини в менші, і навпаки; з порівняння іменованих чисел; зі знаходження сум та різниць іменованих чисел. Також учні виконують множення іменованого числа на неіменоване число і ділення іменованого числа на неіменоване та на іменоване число.

Учні формулюють такі правила.

> При діленні іменованого числа на неіменоване число в частці одержуємо іменоване число.
> При діленні іменованого числа на іменоване число в частці одержуємо неіменоване число.

МАСА

Під час вивчення нумерації чисел у межах 1000 учні ознайомлюються з новими одиницями вимірювання маси: 1 грам (г) та 1 тонна (т) і співвідношенням нових одиниць вимірювання маси з уже відомими. Ці назви дітям знайомі.

Маса

$$1\text{ г} = \frac{1}{1000}\text{ кг}$$

$$1\text{ кг} = 1000\text{ г} = \frac{1}{100}\text{ ц} = \frac{1}{1000}\text{ т}$$

$$1\text{ ц} = 100\text{ кг} = \frac{1}{10}\text{ т}$$

$$1\text{ т} = 10\text{ ц} = 1000\text{ кг}$$

Завдання вчителя полягає у формуванні в дітей конкретних уявлень про грам. Учні ознайомлюються з набором важків, легших від 1 кг. Для одержання конкретних уявлень про 1 г учні тримають у руках важок масою 1 г, 2 г, ... За допомогою вагів упевнюються, що 1 кг = 1000 г. Потім беруться до вправ зі зважування й відважування з точністю до 1 г; записують одержані числа і читають їх. Рекомендується ознайомити дітей із циферблатними автоматичними вагами.

Для вимірювання великих мас вводиться нова одиниця — тонна (т): 1 т = 1000 кг.

Для закріплення знань про нові одиниці вимірювання маси і їх співвідношення з 1 кг розв'язуються задачі, які містять іменовані числа, подані в грамах; діти порівнюють іменовані числа, подані в одиницях вимірювання маси; виконують арифметичні дії додавання і віднімання, множення і ділення іменованого числа на неіменоване; ділення іменованого числа на іменоване число.

ЧАС

Ознайомлення з одиницями вимірювання часу

Під час вивчення цієї теми учні повторюють одиниці вимірювання часу та співвідношення між ними.

Час

$$1 \text{ с} = \frac{1}{60} \text{ хв}$$

$$1 \text{ хв} = 60 \text{ с} = \frac{1}{60} \text{ год}$$

$$1 \text{ год} = 60 \text{ хв} = \frac{1}{24} \text{ доби}$$

$$1 \text{ доба} = 24 \text{ год} = \frac{1}{7} \text{ тижня}$$

$$1 \text{ тиждень} = 7 \text{ діб}$$

$$1 \text{ місяць} = \frac{1}{12} \text{ року}$$

$$1 \text{ рік} = 12 \text{ місяців}$$

Учні вчаться визначати час за циферблатом годинника. Розглядаючи циферблат годинника, діти розв'язують прості задачі на час, у яких для відповіді на запитання потрібно перевести складене іменоване число, подане в одиницях вимірювання часу, у просте. Школярі знаходять частину від одиниці вимірювання часу.

Розглянемо методику вивчення окремих питань теми.

Найбільшою одиницею вимірювання часу є століття.

Століття — це проміжок часу, який містить 100 років.

Рік — це проміжок часу, протягом якого Земля робить повний оберт навколо Сонця. Рік містить 365 діб та ще $\frac{1}{4}$ доби. Тому домовилися вважати, що 3 роки поспіль мають по 365 діб, а четвертий має 366 діб. Рік, у якому 366 діб, називають *високосним*.

За час, протягом якого Земля робить повний оберт навколо Сонця, Місяць робить 12 повних обертів навколо Землі. Тому рік поділяють на 12 проміжків — місяців. Рік містить 12 місяців.

Місяць — це проміжок часу, протягом якого Місяць робить повний оберт навколо Землі та навколо своєї осі. Період руху Місяця навколо своєї осі та період руху Місяця навколо Землі збігаються, тому ми бачимо Місяць весь час з однієї сторони. Місяць як проміжок часу приблизно дорівнює 30,4 доби, оскільки містить від 28 до 31 доби.

Уточнення уявлень про рік, місяць, тиждень відбувається на основі практичних вправ, які вимагають застосування табеля-календаря. Діти під керівництвом учителя складають табель-календар на той чи інший місяць.

Розглядаючи календар, діти краще уявляють собі, скільки днів у році; скільки в році місяців; у якій послідовності вони йдуть один за одним; скільки днів у місяці.

Працюючи з табелем-календарем, звертаємо увагу учнів на кількість днів у кожному місяці; виписуємо та запам'ятовуємо місяці, у яких 30 днів (таких місяців усього чотири: квітень, червень, вересень, листопад).

Крім того, формуючи уявлення про рік, спираємося на близькі дітям спостереження: від святкування дня народження до наступного святкування пройде один рік, від святкування Нового року до наступного святкування пройде один рік тощо.

Високосні роки: 2020, 2024, 2028, ... Високосні роки повторюються через кожні три роки, кожний четвертий рік — високосний. Зазначимо, що число, яке відповідає номеру високосного року, ділиться на 4 без остачі. У високосному році лютий містить 29 діб; у звичайному році — 28 діб.

Доба — проміжок часу, протягом якого Земля робить повний оберт навколо своєї осі. Доба ділиться на 24 рівні частини — години (доба містить 24 години). Нова доба починається опівночі.

Формуючи уявлення про добу, спираємося на близькі дітям спостереження: від початку занять сьогодні до початку занять завтра пройде одна доба. Доба — це ранок, день, вечір, ніч. Вивчаючи добу, важливо уточнити уявлення, які пов'язані з термінами «вчора», «позавчора», «сьогодні», «завтра», «післязавтра». Пропонуємо дітям розповісти, що вони робили вчора, що вони роблять сьогодні, що збираються робити завтра, який сьогодні день тижня, яке число, яке число буде завтра, яке число було вчора тощо.

Починаючи з 3 класу, формуємо конкретні уявлення про проміжки часу: година, хвилина, секунда. Учні 3 класу досить точно відчувають проміжок часу, протягом якого триває урок. Тому вказівка на те, що урок і перерва тривають разом близько однієї години, дає дітям можливість відчути, який саме проміжок часу є годиною (відхилення 5–10 хвилин на цьому етапі навчання великого значення не має).

Для формування конкретних уявлень про хвилину можна запропонувати учням виконати різноманітні завдання, заздалегідь обмеживши час їхнього виконання: обчислити значення виразів усно і записати лише відповіді (10–15 виразів за 3 хвилини). Можна перевірити, хто вміє рахувати до 60 так, щоб пройшла 1 хвилина.

Система підрахунку тривалих проміжків часу, у якій встановлено певний порядок підрахунку днів у році і вказування епохи, від якої ведеться підрахунок, називається **календарем**. У нашій країні, як і в більшості інших країн, використовується григоріанський календар.

Методика навчання учнів визначенню часу за годинником

Час визначають за годинником.

Для годинної стрілки проміжок часу між двома великими поділками дорівнює 1 годині. У добі 24 години, а циферблат годинника містить 12 поділок, тому годинна стрілка робить два повні оберти по циферблату годинника за 1 добу.

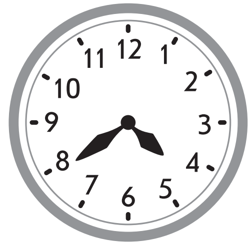
Хвилинна стрілка робить повний оберт за 1 годину. Тому проміжок часу для хвилинної стрілки між двома великими поділками дорівнює: 60 хв $: 12 = 5$ хв.

Дуже просто визначати час за годинником, коли годинна стрілка стоїть на певній поділці шкали, а хвилинна стрілка — на поділці 12. У такому випадку кажемо, наприклад: «рівно 3-тя година». Якщо годинна та хвилинна стрілки розташовані інакше, то для визначення часу за годинником потрібно здійснити певні міркування.

Існує два способи визначення часу за годинником.

Скористаймося малюнком.

І спосіб



1) Визначити положення годинної стрілки.
   Бачимо, що годинна стрілка розташована між поділками 4 і 5. Уже пройшло 4 години, тому читаємо: «4 години...».
2) Визначити положення хвилинної стрілки. Хвилинна стрілка показує на поділку 8. Тому 5 хв $\cdot 8 = 40$ хв. Читаємо: «4 години 40 хвилин».

Алгоритм визначення часу за годинником можна подати учням у вигляді пам'ятки.

ПАМ'ЯТКА

Визначення часу за годинником

1. Визначаю, між якими поділками розташована годинна стрілка. Визначаю, яку поділку вона пройшла, і називаю це число зі словом «годин».
2. Визначаю, на яку поділку вказує хвилинна стрілка. Множу 5 хвилин на це число й одержую число хвилин.
3. Називаю: «... година і ... хвилин».

II спосіб

1) Як і в першому способі, визначити положення годинної стрілки. Бачимо, що годинна стрілка розташована між поділками 4 і 5.
2) Визначити, скільки хвилин не вистачає до 5 годин. Хвилинній стрілці залишилося пройти до поділки 12 ще 4 поділки, тому 5 хв $\cdot$ 4 = 20 хв. Читаємо: «За 20 хвилин 5-та година».

Формулювання, у яких використовуються терміни «чверть» і «половина», повинні бути пов'язані з діленням круга на 2 або 4 рівні частини. Установлюємо зв'язок: за $\frac{1}{2}$ години велика стрілка робить $\frac{1}{2}$ оберту; за $\frac{1}{4}$ години — $\frac{1}{4}$ оберту. Діти повинні навчитися впізнавати відповідні положення стрілок на циферблаті майже без цифр (на такому циферблаті має бути вказаним початок руху стрілок — 12 годин).

Одним із важких є питання про розгляд 12-годинного і 24-годинного рахунків часу в добі. Цьому треба приділити певну увагу.

У добі 24 години. На циферблаті годинника 12 поділок, тому годинна стрілка проходить за добу циферблат 2 рази: $24 : 12 = 2$ — рази.

Існує два способи читання часу.

I спосіб

Якщо користуються 12 поділками циферблата годинника, час читають із вказівкою відповідного часу доби, наприклад: 2 год ночі, 8 год ранку, 12 год дня, 7 год вечора.

II спосіб

Якщо користуються 24 поділками циферблата годинника:

1) вказуючи час від опівночі до опівдня, час читають без змін: 2 год ночі — просто 2 год, 7 год ранку — просто 7 год, 10 год дня — просто 10 год;
2) вказуючи час від опівдня до опівночі, додають ще 12 год, наприклад: 2 год дня — це 2 год + 12 год = 14 год, 7 год вечора — це 7 год + 12 год = 19 год, 10 год ночі — це 10 год + 12 год = 22 год.

Для закріплення одержаних учнями знань пропонуються вправи на читання часу двома способами.

1. Прочитайте час іншими способом у кожному випадку.

6 год вечора = $\square$ год   3 год дня = $\square$ год
$\square$ = 5 год $\square$ = 23 год

Міри довжини, маси, вартості — це десяткові міри. У них крупна одиниця більша за дрібну в 10, 100, ..., разів. Міри часу — не десяткові. Це спричинює певні труднощі при виконанні арифметичних дій додавання і віднімання іменованих чисел, поданих в одиницях вимірювання часу.

Після складення таблиці співвідношення одиниць вимірювання часу вчимо дітей замінювати більші одиниці вимірювання часу меншими, і навпаки.

2. Подайте іменовані числа в інших одиницях вимірювання.
3 доби = $\square$ год   4800 с = $\square$ хв

Розглянемо перший вираз. 1 доба містить 24 год; 3 доби в 3 рази більше за 1 добу, тому 3 доби містять у 3 рази більше годин: 24 год · 3 = 72 год.

Розглянемо другий вираз. 60 с складають 1 хв; у 4800 с міститься по 60 с — 80 разів (4800 с : 60 с = 80 — разів), тому 4800 с = 80 хв.

Задачі на час

Задачі на час містять три компоненти: час початку події, тривалість події і час закінчення події. Ці задачі записуються коротко у формі таблиці.

Задачі на знаходження тривалості події

3. Розв'яжіть задачу.

Перерва розпочалася о 10 год 10 хв і закінчилася о 10 год 30 хв. Скільки часу тривала перерва?

–

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
10 год 10 хв	?	10 год 30 хв

Щоб знайти тривалість події, потрібно від часу закінчення події відняти час початку події.

Розв'язання:
10 год 30 хв – 10 год 10 хв = 20 хв — тривалість перерви.
Відповідь: перерва тривала 20 хв.

Задачі на знаходження часу закінчення події

4. Розв'яжіть задачу.

Перерва розпочалася о 10 год 10 хв і тривала 20 хв. Коли закінчилася перерва?

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
10 год 10 хв	20 хв	?

Щоб знайти час закінчення події, потрібно до часу початку події додати тривалість події.

Розв'язання:
10 год 10 хв + 20 хв = 10 год 30 хв — час закінчення перерви.
Відповідь: перерва закінчилася о 10 год 30 хв.

Задачі на знаходження часу початку події

5. Розв'яжіть задачу.

Перерва тривала 20 хв і закінчилася о 10 год 30 хв. Коли розпочалася перерва?

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
?	20 хв	10 год 30 хв

Щоб знайти час початку події, потрібно від часу закінчення події відняти тривалість події.

Розв'язання:

10 год 30 хв – 20 хв = 10 год 10 хв — час початку перерви.

Відповідь: перерва розпочалася о 10 год 10 хв.

6. Розв'яжіть задачу.

Уроки в школі починаються о 8 год і тривають 4 год. О котрій годині закінчуються заняття?

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
8 год	4 год	?

Наводимо методику роботи над задачею.

Що позначає число 8? [Час початку занять у школі.]

Що позначає число 4? [Тривалість уроків.]

Яке запитання задачі? [О котрій годині закінчуються заняття?]

Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? [Потрібно знати два числові значення: I — час, коли починаються заняття (відомо, 8 год) та II — час, протягом якого тривають заняття (відомо, 4 год).]

Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? [Дією додавання.]

Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? [Так, оскільки відомі обидва числові значення.]

Розв'язання:

8 год + 4 год = 12 год — час закінчення занять.

Відповідь: заняття закінчуються о 12 год.

Складаємо обернені задачі.

8, 4, $\boxed{12}$ — пряма задача.

$\boxed{8}$, 4, 12 — обернена задача 1.

Уроки в школі тривають 4 год і закінчуються о 12 год. О котрій годині починаються заняття в школі?

Розв'язання:

12 год – 4 год = 8 год — час початку занять.

Відповідь: заняття розпочинаються о 8 год.

8, $\boxed{4}$, 12 — обернена задача 2.

Уроки у школі розпочинаються о 8 год і закінчуються о 12 год. Скільки годин тривають заняття в школі?

Розв'язання:

12 год – 8 год = 4 год — тривають заняття в школі.

Відповідь: заняття в школі тривають 4 год.

Узагальнити одиниці вимірювання величин можна на основі таблиць.

Одиниці довжини

· 100

$$1\ \text{км}\ \frac{\cdot\ 1000}{:\ 1000}\ 1\ \text{м}\ \frac{\cdot\ 10}{:\ 10}\ 1\ \text{дм}\ \frac{\cdot\ 10}{:\ 10}\ 1\ \text{см}\ \frac{\cdot\ 10}{:\ 10}\ 1\ \text{мм}$$

: 100

Одиниці маси

· 1000

$$1\ \text{т}\ \frac{\cdot\ 10}{:\ 10}\ 1\ \text{ц}\ \frac{\cdot\ 1000}{:\ 1000}\ 1\ \text{кг}\ \frac{\cdot\ 1000}{:\ 1000}\ 1\ \text{г}$$

: 1000

Одиниці часу

· 365; 366

$$1\ \text{рік}\ \frac{\cdot\ 12}{:\ 12}\ 1\ \text{міс}\ \frac{\cdot\ 28\ (29);\ 30;\ 31}{:\ 28\ (29);\ 30;\ 31}\ 1\ \text{доба}\ \frac{\cdot\ 24}{:\ 24}\ 1\ \text{год}\ \frac{\cdot\ 60}{:\ 60}\ 1\ \text{хв}\ \frac{\cdot\ 60}{:\ 60}\ 1\ \text{с}$$

: 365; 366

7.2. ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 4 КЛАСУ

Наочний і дидактичний матеріал:

- набір геометричних фігур;
- рисунок із зображенням різних геометричних фігур;
- квадрат зі стороною 4 см і прямокутник зі сторонами 5 см і 3 см;
- прямокутний трикутник із катетами 12 см і 8 см та прямокутник зі стороною 8 см і 6 см;
- модель квадратного сантиметра;
- палетка;

- креслення фігур довільної форми;
- модель квадратного дециметра.

У 4 класі узагальнюються уявлення учнів про одиниці вимірювання величин: довжини, маси, часу; одиниці вимірювання величин позв'язуються з частинами величини; розглядаються два способи додавання і віднімання іменованих чисел, у тому числі — письмово. Також учні ознайомлюються з новою величиною — площею фігури — та одиницями її вимірювання: 1 мм^2, 1 см^2, 1 дм^2, 1 м^2, 1 км^2, 1 ар (а), 1 гектар (га); із правилом знаходження площі прямокутника; із вимірюванням площі фігури за допомогою палетки; розв'язують задачі на знаходження площі прямокутника та обернені до них. Учні виконують арифметичні дії ділення іменованого числа на неіменоване число та іменованого числа на іменоване, зокрема письмове. Узагальнюються знання дітей про міри часу; учні розв'язують прості задачі на час.

ДОВЖИНА

Методику узагальнення поняття «довжина» див. за посиланням.

Під час вивчення нумерації багатоцифрових чисел узагальнюються знання дітей про одиниці вимірювання довжини та їх співвідношення.

Довжина

$$1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см} = \frac{1}{100} \text{ дм} = \frac{1}{1000} \text{ м}$$

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ дм} = \frac{1}{100} \text{ м}$$

$$1 \text{ дм} = 10 \text{ см} = 100 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ м}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм} = \frac{1}{1000} \text{ км}$$

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$$

Учні замінюють більші одиниці вимірювання довжини меншими, і навпаки.

Наприклад, потрібно 67 250 м записати в кілометрах та метрах. Міркуємо так: 1 км становить 1000 м. Отже, 67 250 м містить стільки кілометрів, скільки тисяч у числі 67 250, тобто 67 тисяч; 67 250 м = 67 км 250 м.

Щоб замінити менші одиниці вимірювання величини більшими, потрібно:

1) згадати, як пов'язані ці одиниці вимірювання; скільки менших одиниць вимірювання міститься в більшій одиниці;
2) якщо співвідношення одиниць вимірювання виражається числом 10 (100, 1000), потрібно дізнатися, скільки всього десятків (сотень, тисяч) містить число;
3) визначити, стільки буде більших одиниць вимірювання, а решта — менші одиниці.

Можна міркувати інакше:

1) згадати, скільки менших одиниць вимірювання міститься в більшій одиниці;
2) розділити число менших одиниць на це число.

67 250 м : 1000 м = 67 (ост. 250). [Щоб розділити число на 1000, потрібно справа прикрити три цифри — одержуємо частку, решта становить остачу.] Маємо: 67 250 м = 67 км 250 м.

Діти переводять складені іменовані числа в прості.

Наприклад, потрібно 37 км 30 м перевести в метри.

Міркуємо так: 1 км = 1000 м; 37 км = 37 000 м.

37 км 30 м = 37 000 м + 30 м = 37 030 м.

Щоб більші одиниці вимірювання величини замінити меншими, потрібно:

1) згадати, скільки менших одиниць вимірювання міститься в більшій одиниці;
2) помножити число більших одиниць на це число.

Наприклад:

8 км 125 м = $8 \cdot 1000$ м + 125 м = 8000 м + 125 м = 8125 м.

Також під час вивчення теми «Одиниці вимірювання величин» у межах нумерації багатоцифрових чисел діти знаходять частину від іменованого числа, порівнюють величини. Міркування проводяться так само, як було запропоновано в 3 класі.

У межах теми «Додавання і віднімання багатоцифрових чисел» вивчається підтема «Додавання і віднімання іменованих чисел». Вивчаючи цю підтему, учні виконують як усні, так і письмові обчислення.

Для письмового додавання і віднімання складених іменованих чисел існує два способи дій. Узагальнену пам'ятку додавання і віднімання складених іменованих чисел див. на с. 94.

Тут наводимо тільки приклад: потрібно знайти значення різниці 62 м 08 см і 8 м 37 см.

I спосіб

62 м 08 см = 6208 см;

8 м 37 см = 837 см.

$$
\begin{array}{r}
-\,6208\text{ (см)}\\
837\text{ (см)}\\
\hline
5371\text{ (см)}
\end{array}
$$

5371 см = 53 м 71 см.

II спосіб

$$
\begin{array}{r}
108\phantom{\text{ см}}\\
-\,62\text{ м }08\text{ см}\\
8\text{ м }37\text{ см}\\
\hline
53\text{ м }71\text{ см}
\end{array}
$$

Під час вивчення теми «Множення і ділення багатоцифрових чисел на одноцифрове число» з'являються завдання на ділення складених іменованих чисел на іменоване число. Наприклад, потрібно знайти частку 15 км 250 м і 5 м.

15 км 250 м : 5 м = 15 250 м : 5 м = 3050.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,15250 & 5\\
\cline{2-2}
15 & 3050\\
\cline{1-1}
-\,25 & \\
25 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

ПАМ'ЯТКА

Ділення іменованих чисел

1. Замінюю складене іменоване число простим іменованим.
2. Приводжу числа до однакових найменувань.
3. Ділю числа.
4. У результаті одержую число без найменування.

Також виконується множення і ділення складеного іменованого числа на одноцифрове число.

Наприклад, потрібно 13 кг 50 г поділити на 3.

13 кг 050 г : 3 = 13050 г : 3 = 4350 г = 4 кг 350 г

ПАМ'ЯТКА

$\dfrac{\textbf{Множення}}{\textbf{Ділення}}$ **іменованого числа на одноцифрове число**

1. Замінюю складене іменоване число простим іменованим.
2. $\dfrac{\text{Множу}}{\text{Ділю}}$ числа.
3. У результаті одержую просте іменоване число.
4. Замінюю просте іменоване число складеним іменованим.

МАСА

Під час вивчення нумерації багатоцифрових чисел учні користуються одиницею вимірювання маси 1 т, установивши її співвідношення з відомими одиницями вимірювання маси.

Маса

$1\ \text{г} = \dfrac{1}{1000}\ \text{кг}$

$1\ \text{кг} = 1000\ \text{г} = \dfrac{1}{100}\ \text{ц} = \dfrac{1}{1000}\ \text{т}$

$1\ \text{ц} = 100\ \text{кг} = \dfrac{1}{10}\ \text{т}$

$1\ \text{т} = 10\ \text{ц} = 1000\ \text{кг}$

На цьому етапі учні замінюють більші одиниці вимірювання маси меншими, і навпаки. Міркування проводяться аналогічно тому, як це відбувалось під час розв'язування завдань із переведення одиниць вимірювання довжини.

Також учні порівнюють іменовані числа, подані в одиницях вимірювання маси. Діти вчаться знаходити частину від іменованого числа, поданого в одиницях вимірювання маси.

У межах теми «Додавання і віднімання багатоцифрових чисел» і в наступних темах вивчається додавання і віднімання іменованих чисел: усні й письмові прийоми. Два способи письмового віднімання ми розглянули на прикладі віднімання складених іменованих чисел, виражених в одиницях вимірювання довжини. Письмове додавання та віднімання складених іменованих чисел, виражених в одиницях вимірювання маси, здійснюється аналогічно.

Пропонуються завдання, у яких учні повинні іменоване число поділити або помножити на неіменоване число.

При множенні й діленні іменованого числа на неіменоване число одержуємо іменоване число.

Наприклад:

$5\ \text{т}\ 060\ \text{кг} \cdot 50 =$
$= 5060\ \text{кг} \cdot 50 =$
$= 253000\ \text{кг} = 253\ \text{т}$

$$\begin{array}{r} 5060\ (\text{кг}) \\ \times\quad 50\phantom{\ (\text{кг})} \\ \hline 253000\ (\text{кг}) \\ 253\ (\text{т}) \end{array}$$

$12\ \text{т}\ 720\ \text{кг} : 80 =$
$= 12720\ \text{кг} : 80 = 159\ \text{кг}$

$$\begin{array}{r|l} 12720 & 80 \\ \cline{2-2} -80 & 159 \\ \hline 472 & \\ -400 & \\ \hline 720 & \\ -720 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Також учні вчаться ділити іменоване число на іменоване число.

> При діленні іменованого числа на іменоване число
> в результаті одержуємо неіменоване число.

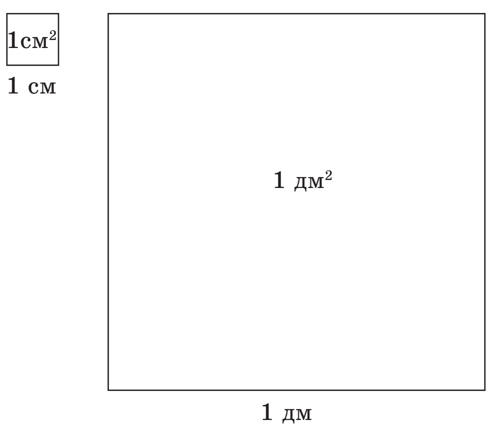
Наприклад:
12 кг 040 г : 8 г=
=12040 г : 8 г=1505

$$
\begin{array}{r|l}
-12040 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{8} & 1505 \\
-40 & \\
\underline{40} & \\
-40 & \\
\underline{40} & \\
0 &
\end{array}
$$

ПЛОЩА ФІГУРИ

Уявлення про площу фігури має кожна людина: можна говорити про площу класної кімнати; про площу футбольного поля; про площу квартири, у якій мешкає учень; про площу земельної ділянки. При цьому ми розуміємо: якщо ділянки прямокутної форми однакові (наприклад, прямокутники з рівними сторонами), то їхні площі рівні; у більшої ділянки більша площа; площа квартири дорівнює сумі площ її кімнат та інших приміщень.

На відміну від вимірювання довжин відрізків за одиницю вимірювання площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата, сторона якого дорівнює 1 см, 1 дм, 1 м тощо.



Але для фігур, які вивчають у школі, зазвичай можна знайти площу за відповідною формулою або за допомогою палетки.

Наприклад, $S_{\text{прям.}} = a \cdot b$, де a і b — довжини сторін прямокутника.

Площа — це загальна властивість геометричних фігур («мати площу»), яка задовольняє такі умови:
1) за одиничний квадрат можна вибрати будь-який квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини;
2) рівні фігури мають рівні площі (рівними називають фігури, які суміщаються при накладанні);
3) якщо фігура складена зі скінченного числа фігур, то її площа дорівнює сумі площ цих фігур.

За чинною навчальною програмою формування уявлень про площу фігури відбувається поступово. При цьому (окрім опрацювання навичок вимірювання площі) метою роботи повинно стати формування загальних уявлень про площу фігури як про геометричну величину.

Перед вивченням цієї теми діти знайомляться з геометричними фігурами: кругом і многокутниками, зокрема прямокутником і квадратом. Починаючи з 1 класу, діти вчаться складати геометричні фігури з кількох частин і ділити фігури на кілька частин.

Безпосередньо тема «Площа фігури. Одиниці вимірювання площі» вивчається в 4 класі.

Формування загальних уявлень про площу фігури

Тема «Площа фігури» вивчається в 3 етапи: підготовчий етап; ознайомлення; перенесення одержаних знань, умінь і навичок, поширення уявлень учнів.

На підготовчому етапі повторюються і систематизуються знання учнів, на основі яких формуються уявлення про площу фігури, а саме:
1) уявлення про рівні фігури: відрізки, трикутники, прямокутники, квадрати, круги;
2) уявлення про ділення фігур на частини, підрахунок частин і складання нових фігур із частин;
3) уявлення про прямокутник і квадрат та їхні властивості.

До початку вивчення теми «Площа фігури» учні вже добре знайомі з цілою низкою величин (зокрема, з довжиною, масою, часом та іншими), з одиницями вимірювання цих величин та процесом їх вимірювання. Вивчення нової величини — площі — дозволяє не лише повторити вже відоме, але й підвести дітей до узагальнення, що спільною особливістю всіх величин (довжини, маси, площі тощо) є те, що для кожної з них можуть бути встановлені відношення рівності та нерівності; усі ці величини можна виміряти, причому сутність способу вимірювання завжди однакова: задається одиниця вимірювання і підраховується, скільки разів вона міститься в цій величині.

На етапі ознайомлення накопичуються відомості про площу фігури, одиниці її вимірювання, методику вимірювання площі фігури за допомогою палетки, правила знаходження площі прямокутника і квадрата.

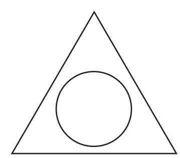
Під час вивчення теми доцільно проводити уроки у формі практичних робіт. Особливу увагу слід приділити організації та проведенню першого уроку, на якому вводиться поняття площі фігури.

Наведемо приклад організації такого уроку.

Уточнюємо, як порівнюються за довжиною два відрізки: накладанням, «на око», вимірюванням довжин відрізків і порівнянням одержаних чисел.

Порівнюємо трикутник і круг. (Діти працюють з набором геометричних фігур.) Накладаємо круг на трикутник.

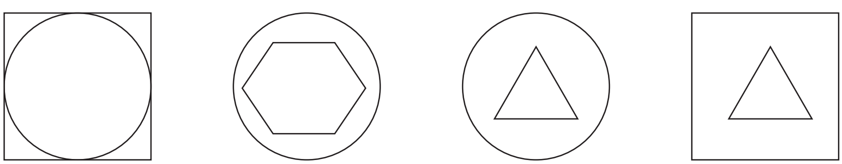
Бачимо, що круг є частиною трикутника. У цьому випадку кажуть, що площа круга менша від площі трикутника, і навпаки, — площа трикутника більша за площу круга.



Учні роблять висновок.

> Щоб порівняти площі фігур, потрібно одну фігуру накласти на іншу: якщо одна фігура при цьому цілком розміщується в іншій, то її площа менша, і навпаки.

Потім учитель пропонує порівняти площі заздалегідь підготованих фігур. Потрібно взяти такі пари фігур, щоб одна з них цілком розміщувалася в іншій, наприклад, як показано на малюнку.

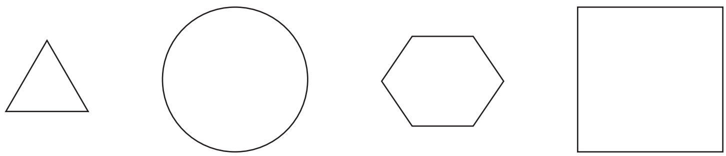


Учні, виконуючи накладання однієї фігури на іншу, роблять висновки на кшталт: «Площа трикутника менша від площі квадрата. Площа квадрата більша за площу трикутника».

Важливо показати учням особливий випадок, коли при накладанні однієї фігури на іншу вони повністю суміщаються. Учитель повідомляє учням: «Про такі фігури кажуть, що вони мають рівні площі».

Розглядаємо малюнок, на якому зображені різноманітні геометричні фігури.

Запитуємо, як можна порівняти площі цих фігур.



Діти «на око» порівнюють площі фігур.

Пропонуємо порівняти площі двох фігур, які ні накладанням, ні «на око» порівняти не можна.

Наприклад, потрібно порівняти площі квадрата зі стороною 4 см і прямокутника зі сторонами 5 см і 3 см (фігури заздалегідь вирізані з картону).

Пропонуємо порівняти площі цих фігур відомими способами:

- «на око» — не можна;
- накладанням — не можна, оскільки жодна з цих фігур не міститься повністю в іншій.

Виникає проблема, як порівняти площі цих фігур. Тут допомагають уявлення школярів про ділення фігур на рівні частини. Діти можуть запропонувати поділити ці фігури на рівні квадрати і порахувати їхню кількість. Якщо в учнів виникають труднощі, учитель пропонує їм накреслити в зошиті по клітинках дві фігури: квадрат зі стороною 4 см і прямокутник зі сторонами 5 см і 3 см; потім полічити кількість клітинок, які містяться у квадраті та в прямокутнику, і порівняти одержані числа.

Звертаємо увагу дітей на те, що, виконавши таку роботу, вони подумки розділили кожну фігуру на однакові фігури — квадрати (клітинки зошита) і, прийнявши клітинку зошита за одиницю площі, подали площу квадрата і прямокутника в цих одиницях.

Підрахунки показали, що квадрат містить 64 клітинки, а прямокутник — 60 таких самих клітинок. Отже, площа квадрата більша за площу прямокутника.

Замість клітинок зошита площу цих фігур можна вимірювати й іншими мірками, наприклад, трикутниками або великими квадратами зі стороною завдовжки 2 клітинки.

Пропонуємо дітям порівняти площі трикутника (прямокутний трикутник із катетами 12 см і 8 см) та прямокутника (зі сторонами 8 см і 6 см).

(Зазначимо, що можна обрати інші розміри цих фігур, але їх потрібно підібрати так, щоб площі фігур були рівними:

$$S_{\text{трик.}} = \frac{1}{2}\, a \cdot b,\ S_{\text{прям.}} = c \cdot d;\ \ \frac{1}{2}\, a \cdot b = c \cdot d,\ \ \frac{a \cdot b}{2 \cdot d} = c\ .)$$

Складається проблемна ситуація: як порівняти площі цих фігур? Можлива пропозиція — поділити ці фігури на рівні трикутники, підрахувати їхню кількість та порівняти одержані числа.

На зворотній стороні фігури вже мають бути розділені на однакові трикутники. Діти підраховують кількість цих трикутників і порівнюють одержані числа. Кількості трикутників, які містяться в першій та другій фігурах, рівні. Діти роблять висновок про те, що фігури можуть мати різну форму, але однакову площу.

Закріплюємо зроблені висновки, виконуючи вправи з підрахунку числа квадратів, на які розбиті фігури; визначення фігури, яка має більшу площу; знаходження рівних та нерівних за площею фігур, наприклад, таких.

1. Визначте, скільки квадратів потрібно, щоб скласти з них зображені на рисунку фігури; порівняйте площі цих фігур.

Діти визначають, що фігура ліворуч містить 9 квадратів, і фігура праворуч також містить 9 квадратів.

Запитуємо, який висновок можна зробити.

Фігури можуть мати різну форму, але однакову площу.

Робимо висновок: фігури за площею можна порівняти такими способами: накладанням; «на око»; розбити на однакові квадрати або трикутники, підрахувати їхню кількість, порівняти одержані числа і на цій підставі зробити висновок.

Далі учні знайомляться з поняттям квадратного сантиметра.

Ознайомлення з одиницею вимірювання площі — квадратний сантиметр (см²)

Дітям пропонується порівняти площі квадрата зі стороною 4 см і прямокутника зі сторонами 5 см і 3 см. (Учні креслять ці фігури по клітинках у зошиті.) За одиницю вимірювання площі 1 варіант бере клітинку зошита, 2 варіант — трикутник (половину квадрата зі стороною 1 см), 3 варіант — квадрат зі стороною 1 см.

Розбивши ці фігури на запропоновані рівні частини, діти підраховують кількість одиниць вимірювання. Після того як діти виконали завдання, учитель просить їх оголосити результати й заповнює таблицю на класній дошці.

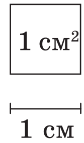
Одиниця вимірювання	Площа квадрата	Площа прямокутника	Результат порівняння площ
Клітинка зошита	64	60	Площа квадрата більша за площу прямокутника.
Трикутник	32	30	Площа квадрата більша за площу прямокутника.
Квадрат зі стороною 1 см	16	15	Площа квадрата більша за площу прямокутника.

Проаналізувавши дані таблиці, бачимо, що результат порівняння площ не залежить від обраної одиниці вимірювання, хоча значення площ при різних одиницях вимірювання різні.

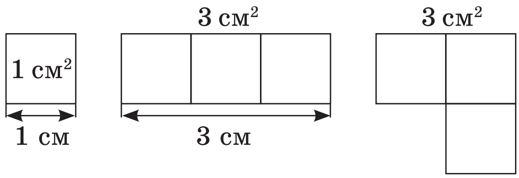
Під час практичних вимірювань зручно вибирати одиницю вимірювання довжини, пов'язану з одиницею вимірювання площі. Згадуємо одиниці вимірювання довжини: 1 см, 1 дм тощо, оскільки одиницями вимірювання площі обрані площі квадратів, довжини сторін яких дорівнюють одиницям вимірювання довжини. Площі невеликих фігур вимірюють у квадратних сантиметрах.

Одиницю вимірювання «квадратний сантиметр» при числах пишуть скорочено так: 1 см².

Діти креслять у зошитах квадратний сантиметр та лінійний сантиметр.



Виконуємо вправи на знаходження площ фігур у квадратних сантиметрах: викладаємо на фігурі моделі квадратного сантиметра і підраховуємо їхню кількість або розбиваємо фігуру на квадратні сантиметри та підраховуємо їхню кількість; робимо висновок.



Вимірювання площі фігури палеткою

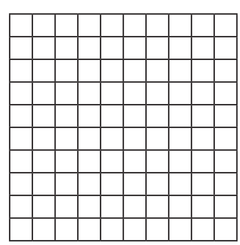
Палетка являє собою прозору плівку, поділену на квадрати площею 1 см². З нею краще ознайомлювати дітей після того, як учні вже знають одиницю вимірювання довжини 1 см та прийоми застосування моделей квадратного сантиметра для вимірювання площі.

На уроці слід показати учням доцільність застосування палетки для вимірювання площ фігур довільної форми.

Розглянемо методику ознайомлення учнів з палеткою та її застосуванням.

Пропонуємо учням серед фігур, які лежать на партах, знайти прямокутник; покласти його перед собою і виміряти його площу, використовуючи моделі квадратного сантиметра.

Діти накладають на прямокутник моделі квадратного сантиметра і підраховують їхню кількість; повідомляють про числове значення площі прямокутника, подане у квадратних сантиметрах. Учитель зазначає, що накладання моделей квадратного сантиметра на фігуру є кропіткою роботою і вимагає багато часу. Тому для вимірювання площ застосовують спеціальну плівку, яку вже поділено на квадратні сантиметри — палетку.



Учитель демонструє палетку і спосіб її використання: накладає палетку на фігури (прямокутники, квадрати), розміщені на дошці. Учні разом з учителем визначають площі цих фігур у квадратних сантиметрах.

Діти роблять висновок.

Щоб знайти площу фігури за допомогою палетки, потрібно:

- накласти палетку на фігуру так, щоб сторони фігури та сітка палетки збігалися;
- не переміщуючи палетки, підрахувати кількість квадратних сантиметрів у фігурі;
- зробити висновок про площу фігури.

Далі вчитель повідомляє учням, що палетка застосовується не лише для визначення площ прямокутника і квадрата, але й для визначення площ фігур довільної форми, наприклад, листочка дерева. Учитель пропонує учням розглянути малюнок, на якому зображено палетку, накладену на листочок дерева. Діти бачать, що на площі листочка укладаються не лише повні квадратні сантиметри, а ще й неповні. Як бути в цьому випадку?

ПАМ'ЯТКА

Вимірювання площі фігури палеткою

1. Накладаю палетку на фігуру так, щоб хоча б одна сторона фігури збігалась із сіткою палетки.
2. Лічу кількість повних квадратних сантиметрів у фігурі.
3. Лічу кількість неповних квадратних сантиметрів у фігурі.
4. Ділю число неповних квадратних сантиметрів на 2.
5. Додаю одержане число до числа повних квадратних сантиметрів.
6. Називаю площу фігури.

Учитель роздає учням креслення фігур довільної форми. Учні за допомогою палетки вимірюють площі цих фігур, працюючи за пам'яткою.

Ознайомлення з одиницями вимірювання площі — 1 дм^2, 1 м^2, 1 км^2, 1 мм^2

Уроки можуть бути побудовані за таким планом:

1) повторення одиниць вимірювання довжини і співвідношень між ними;
2) повторення вже відомих одиниць вимірювання площі;
3) демонстрація практичної необхідності введення нових одиниць вимірювання площі;
4) установлення співвідношення між відомими й новими одиницями вимірювання площі;
5) виконання практичної роботи з обчислення площ прямокутника і квадрата в нових одиницях вимірювання.

До уроку, на якому вводиться поняття квадратного дециметра, для кожного учня має бути підготовлена модель квадратного дециметра, розбита на зворотній стороні на квадратні сантиметри.

Діти згадують відомі їм одиниці вимірювання довжини й співвідношення між ними та виконують завдання:

- на заповнення пропусків: 1 дм = □ см; 50 см = □ дм;
- на порівняння іменованих чисел: 13 дм ◯ 33 см.

Запитуємо учнів, яку одиницю вимірювання площі вони вже знають; що таке квадратний сантиметр; чи зручно вимірювати площу стола у квадратних сантиметрах.

Діти бачать, що для такого вимірювання потрібно мати дуже багато моделей квадратного сантиметра. Розмірковуючи аналогічно до того, як це відбувалося під час вивчення одиниць вимірювання довжини, учні легко доходять висновку про необхідність введення нової, більшої, одиниці вимірювання площі.

Спираючись на вже відомий факт, що квадратний сантиметр — це площа квадрата зі стороною 1 см, учитель пропонує учням висловити здогадку, що таке квадратний дециметр.

Діти самостійно можуть дати означення **квадратного дециметра** — це площа квадрата зі стороною 1 дм.

Учитель показує модель квадратного дециметра. Після цього учні одержують моделі квадратного дециметра і застосовують їх для вимірювання площ.

Інші одиниці вимірювання площі вводяться аналогічно.

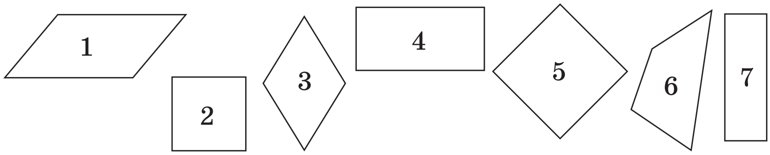
Методику введення одиниць вимірювання площі ар (а) і гектар (га) див. за посиланням.

Методика виведення правила знаходження площі прямокутника

На уроці, присвяченому правилу знаходження площі прямокутника, на етапі актуалізації опорних знань слід повторити:

1) означення прямокутника і квадрата;
2) методику креслення прямокутника і квадрата;
3) одиницю вимірювання площі 1 $см^2$;
4) способи визначення площ фігур.

На цьому етапі застосовуються креслення геометричних фігур, подані на дошці.



Наводимо орієнтовну бесіду.

Яка геометрична фігура називається прямокутником? Назвіть прямокутники, зображені на малюнку. [Прямокутник — це чотирикутник, у якого всі кути прямі. На рисунку прямокутниками є фігури з номерами 2, 4, 5, 7.]

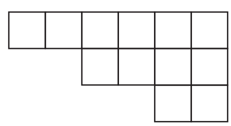
Позначте прямокутник із номером 4 буквами. Назвіть його протилежні сторони. Що можна сказати про довжину протилежних сторін прямокутника? [Протилежні сторони прямокутника рівні.]

Що можна сказати про сторони прямокутника 2? Як він називається? [У цьому прямокутнику всі сторони рівні. Прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається квадратом.]

Яким способом можна визначити площу фігури? [Потрібно розбити її на рівні квадрати — мірки — і підрахувати їхню кількість.]

Чи можна ділити фігуру на будь-які квадрати або є якась домовленість? [Фігуру розбиваємо на квадратні сантиметри. Квадратний сантиметр — це площа квадрата зі стороною 1 см.]

Як пов'язана одиниця вимірювання площі 1 см^2 з одиницею вимірювання довжини 1 см? [1 см — це довжина сторони квадрата, а 1 см^2 — це площа такого квадрата.]

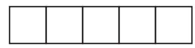


Після обговорення просимо показати на рисунку 1 см^2, 2 см^2; знайти площу фігури. Запитуємо, які виміри є в прямокутнику або як називаються сторони прямокутника. [Довжина і ширина.]

Після цього пропонуємо учням накреслити в зошиті будь-який прямокутник так, щоб на його сторонах укладалося парне число клітинок; визначити довжину і ширину прямокутника таким чином: розбити його сторони на сантиметри (по 2 клітинки) і підрахувати їхню кількість; знайти площу прямокутника. Запитуємо, що для цього слід зробити. [Потрібно розбити прямокутник на квадратні сантиметри і підрахувати їхню кількість.] Запитуємо, скільки квадратних сантиметрів в одному рядку. Просимо подумати, як пов'язане це число з кількістю сантиметрів, що укладаються на довжині прямокутника. Запитуємо, скільки рядків квадратних сантиметрів. Просимо пояснити, як пов'язане це число з кількістю сантиметрів, що укладаються на ширині прямокутника.

Після цього пропонуємо учням виконати низку взаємопов'язаних завдань. На основі поступового виконання цих завдань учні самостійно виводять правило знаходження площі прямокутника.

2. Накресліть прямокутник, довжина якого становить 5 см, а ширина — 1 см. Знайдіть його площу.



Наводимо міркування при виконанні цього завдання.

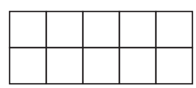
У який спосіб можна знайти площу прямокутника? [Розбити його на квадратні сантиметри і підрахувати їхню кількість. Одержане число квадратних сантиметрів і є площею цього прямокутника.]

Скільки квадратних сантиметрів одержали? Чому дорівнює площа прямокутника з довжиною 5 см і шириною 1 см? [5 см^2]

Заповніть таблицю.

Довжина (см)	Ширина (см)	Площа (см^2)
5	1	5

3. Накресліть прямокутник із довжиною 5 см і шириною 2 см. Знайдіть його площу.



Учні розбивають прямокутник на квадратні сантиметри та підраховують їхню кількість.

Під час виконання цього завдання слід розглянути такі запитання.

Чим відрізняється цей випадок від попереднього (завдання 2)? [У попередньому випадку ми одержали один рядок квадратних сантиметрів, а в цьому — два таких рядки.]

Чому в кожному рядку по 5 квадратних сантиметрів? Як пов'язане це число з одним із вимірів прямокутника? [На довжині прямокутника укладається 5 см.]

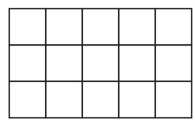
Чому таких рядків два, а в попередньому випадку — лише один? [У попередньому випадку був один рядок, тому що ширина прямокутника дорівнювала 1 см, а в цьому — два рядки, тому що на ширині прямокутника укладається 2 см.]

Що можна сказати про те, скільки квадратних сантиметрів буде в кожному рядку? [У кожному рядку буде стільки квадратних сантиметрів, скільки сантиметрів укладається на довжині прямокутника.]

Що можна сказати про те, скільки буде таких рядків квадратних сантиметрів? [Рядків буде стільки, скільки сантиметрів укладається на ширині прямокутника.]

Чому дорівнює площа заданого прямокутника? Запишіть дані в таблицю.

Довжина (см)	Ширина (см)	Площа (см^2)
5	1	5
5	2	10



4. Дано прямокутник із довжиною 5 см і шириною 3 см. Визначте його площу.

Під час виконання цього завдання слід розглянути такі запитання.

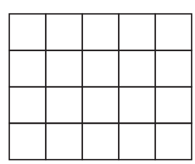
Перед тим як розбивати прямокутник на квадратні сантиметри визначте, скільки квадратних сантиметрів буде в одному рядку. [В одному рядку буде 5 квадратних сантиметрів, тому що на довжині прямокутника укладається 5 см.]

Скільки буде рядків квадратних сантиметрів? [3 рядки, тому що на ширині прямокутника укладається 3 см.]

Чи можна, не розбиваючи прямокутник на квадратні сантиметри, визначити його площу? [Можна. Для цього слід по 5 см^2 взяти 3 рази, тобто число квадратних сантиметрів в одному рядку потрібно помножити на кількість рядків: $5 \cdot 3 = 15$ см^2.]

Запишіть дані в таблицю.

Довжина (см)	Ширина (см)	Площа (см^2)
5	1	5
5	2	10
5	3	15



5. Дано прямокутник із довжиною 5 см і шириною 4 см. Визначте його площу.

Під час виконання цього завдання слід розглянути такі запитання.

Чи можемо ми відразу сказати, скільки буде квадратних сантиметрів у кожному рядку? [Так, 5 см^2, тому що довжина прямокутника дорівнює 5 см.]

Скільки буде рядків квадратних сантиметрів? [4 рядки, тому що ширина прямокутника становить 4 см.]

Чому дорівнює площа прямокутника? Що потрібно зробити, щоб визначити площу прямокутника? [Потрібно знайти добуток. $5 \cdot 4 = 20$.]

Запишіть дані в таблицю.

Довжина (см)	Ширина (см)	Площа (см^2)
5	1	5
5	2	10
5	3	15
5	4	20

Аналізуємо запис $5 \cdot 4 = 20$ (см^2). Що позначає число 5? [Це довжина прямокутника, подана в сантиметрах.] Що позначає число 4? [Це ширина прямокутника, подана в сантиметрах.] Що позначає число 20? [Це площа прямокутника, подана у квадратних сантиметрах. Помноживши довжину на ширину, ми знайшли площу.]

Перевіримо зроблений учнями висновок про знаходження площі прямокутника за даними таблиці.

Довжина (см)	Ширина (см)	Площа (см^2)	
5	1	5	істинно
5	2	10	істинно
5	3	15	істинно
5	4	20	істинно

Щоб знайти площу прямокутника, достатньо довжину прямокутника помножити на його ширину:

$$S_{\text{прям.}} = a \cdot b$$

Пропонуємо учням порівняти випадки, записані в таблиці, і запитуємо, що в них спільне; чим вони відрізняються; як це впливає на значення площі; чому; як знайти площу прямокутника.

Щоб знайти площу прямокутника, потрібно:

1) визначити довжину прямокутника
2) визначити ширину прямокутника

в однакових одиницях вимірювання;

3) перемножити одержані числа (результат записати в тих самих, але квадратних, одиницях вимірювання).

Правило знаходження площі квадрата може бути одержане як особливий випадок правила знаходження площі прямокутника. Тут важливо донести до свідомості дітей, що для знаходження площі квадрата достатньо знати довжину його сторони.

Методику розв'язування задач на знаходження площі прямокутника та обернених до них задач див. за посиланням.

ЧАС

Поняття часу складніше, ніж поняття довжини, маси і площі.

У нашому житті час — це те, що відділяє одну подію від іншої. У прикладних науках час розглядають як величину, тому що проміжки часу мають властивості, подібні до властивостей довжини, площі, маси (саме проміжки часу, а не дати події).

Проміжки часу можна порівнювати. Наприклад, на подолання того самого шляху велосипедом потрібно більше часу, ніж автомобілем.

Проміжки часу можна додавати. Наприклад, навчальний день складається з усіх уроків за розкладом та перерв.

Проміжки часу можна вимірювати. Однак процес вимірювання часу відрізняється від вимірювання довжини та інших величин. Для вимірювання довжини можна багато разів використовувати лінійку; результати вимірювання довжини та інших величин можна кілька разів перевірити. Проміжок часу, який прийнято за одиницю вимірювання, може бути використаний лише один раз. Тобто одиницею вимірювання часу є процес, який регулярно повторюється. Такою одиницею часу в Міжнародній системі одиниць називають секунду. Поряд із секундою використовують й інші одиниці вимірювання часу: хвилина, година, доба, рік, тиждень, місяць, століття.

Такі одиниці, як рік, місяць і доба, були взяті з природи і пов'язані з обертанням небесних тіл, а година, хвилина і секунда придумані людиною.

У 4 класі учні застосовують знання про час та одиниці вимірювання часу, одержані в 3 класі, під час виконання завдань на:

1) заміну більших одиниць вимірювання часу меншими; перетворення складеного іменованого числа в просте; заміну простих іменованих чисел, поданих в одиницях вимірювання часу, складеними іменованими числами;
2) визначення часу за годинником;
3) знаходження частини від одиниці вимірювання часу;
4) знаходження частини, яку становить одне іменоване число від іншого (обидва числа подані в одиницях вимірювання часу);
5) письмове додавання і віднімання складених іменованих чисел, поданих в одиницях вимірювання часу.

Також розв'язуються прості і складені задачі на час, у яких використовуються складені іменовані числа, подані в одиницях вимірювання часу.

У 4 класі одиниці вимірювання часу пов'язуються з обертанням Землі навколо Сонця і Місяця навколо Землі. Одиниці вимірювання часу подаються як частини більших одиниць вимірювання часу. Узагальнюється співвідношення між одиницями вимірювання часу. Докладніше див. за посиланням.

Арифметичні дії з іменованими числами, поданими в одиницях вимірювання часу

Нагадаємо, що, на відміну від десяткових мір довжини, маси, вартості, міри часу не десяткові. Це слід ураховувати під час виконання арифметичних дій додавання і віднімання іменованих чисел, поданих в одиницях вимірювання часу.

Після засвоєння таблиці мір часу переходимо до вивчення правил виконання арифметичних дій з іменованими числами, поданими в одиницях вимірювання часу. Завдання підбираються за збільшенням складності: спочатку сума секунд і хвилин складає не більш ніж 60, а потім розглядаються складніші випадки.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 6\text{ хв }53\text{ с} \\ 8\text{ хв }40\text{ с} \end{array} \\ \hline 14\text{ хв }93\text{ с} \\ 15\text{ хв }33\text{ с} \end{array}$$

Додавши іменовані числа, ми одержали суму: 14 хв 93 с.
Але 93 с = 60 с + 33 с;
60 с = 1 хв.
Замінивши 60 с на 1 хв, одержуємо: 14 хв + 1 хв = 15 хв.
Відповідь: 15 хв 33 с.

$$\begin{array}{r} (14\text{ хв }93\text{ с}) \\ -\begin{array}{r} 15\text{ хв }33\text{ с} \\ 8\text{ хв }40\text{ с} \end{array} \\ \hline 6\text{ хв }53\text{ с} \end{array}$$

Від 33 с не можна відняти 40 с. Позичаємо 1 хв і замінюємо її на 60 с.
15 хв − 1 хв = 14 хв — залишилося.
60 с + 33 с = 93 с;
93 с − 40 с = 53 с;
14 хв − 8 хв = 6 хв.
Відповідь: 6 хв 53 с.

Так само обчислюються вирази на додавання і віднімання годин і хвилин.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 8\text{ год }46\text{ хв} \\ 5\text{ год }27\text{ хв} \end{array} \\ \hline 13\text{ год }73\text{ хв} \\ 14\text{ год }13\text{ хв} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (12\text{ год }75\text{ хв}) \\ -\begin{array}{r} 13\text{ год }15\text{ хв} \\ 7\text{ год }54\text{ хв} \end{array} \\ \hline 5\text{ год }21\text{ хв} \end{array}$$

Під час обчислення подібних виразів доцільно мати перед очима «таблицю часу» або дозволяти учням користуватися нею.

Корисними є завдання на додавання або віднімання іменованих чисел із подальшою перевіркою оберненою дією.

Розв'язання:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 5\text{ діб }17\text{ год} \\ 6\text{ діб }16\text{ год} \end{array} \\ \hline 11\text{ діб }33\text{ год} \\ 12\text{ діб }09\text{ год} \end{array}$$

Спочатку знаходимо суму:
5 діб 17 год + 6 діб 17 год =
= 11 діб 33 год.
33 год більше за 1 добу;
24 год = 1 доба;
33 год = 24 год + 9 год =
= 1 доба 9 год;
11 діб + 1 доба = 12 діб.
Відповідь: 12 діб 09 год.

Перевірка:

$$\begin{array}{r} (11\text{ діб }33\text{ год}) \\ -\begin{array}{r} 12\text{ діб }09\text{ год} \\ 5\text{ діб }17\text{ год} \end{array} \\ \hline 6\text{ діб }16\text{ год} \end{array}$$

Від 9 годин не можна відняти 17 годин, тому позичаємо 1 добу і замінюємо її годинами:
1 доба = 24 год;
24 год + 9 год = 33 год;
33 год − 17 год = 16 год.
Було 12 діб, позичили 1 добу, залишилося 11 діб:
11 діб − 5 діб = 6 діб.
Відповідь: 6 діб 16 год.

Зауваження: оскільки в добі 24 год (двоцифрове число), то число годин зручно писати двоцифровим числом. Замість 12 діб 9 год зручніше писати 12 діб 09 год.

ОСНОВНІ ПОХІДНІ ВЕЛИЧИНИ

Варто зазначити, що величини поділяють на основні (довжина, місткість, маса, час, площа) та похідні (швидкість, вартість, продуктивність праці).

Швидкість — це шлях, який долає тіло за одиницю часу. Швидкість вимірюється в таких одиницях: $\frac{\text{км}}{\text{год}}$; $\frac{\text{км}}{\text{хв}}$; $\frac{\text{км}}{\text{с}}$; $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\frac{\text{м}}{\text{хв}}$; … .

Прийняті буквені позначення:

v — швидкість; s — відстань, або подоланий шлях; t — час.

Щоб знайти шлях, який подолало тіло, потрібно швидкість руху помножити на час руху: $s = v \cdot t$.

Щоб знайти швидкість руху тіла, потрібно подоланий ним шлях поділити на час руху: $v = s : t = \frac{s}{t}$.

Щоб знайти час руху тіла, потрібно подоланий ним шлях поділити на швидкість руху: $t = s : v = \frac{s}{v}$.

Вартість — це кількість грошей, які сплачують за всю покупку. Одиницями вартості є гривні (грн) та копійки (к.). Прийняті позначення: В — вартість, Ц — ціна, К — кількість.

Ціна — це вартість одиниці товару.

Щоб знайти вартість, потрібно ціну помножити на кількість: $\text{В} = \text{Ц} \cdot \text{К}$.

Щоб знайти ціну, потрібно вартість поділити на кількість: $\text{Ц} = \text{В} : \text{К} = \frac{\text{В}}{\text{К}}$.

Щоб знайти кількість, потрібно вартість поділити на ціну: $\text{К} = \text{В} : \text{Ц} = \frac{\text{В}}{\text{Ц}}$.

Продуктивність праці — це робота, виконана за одиницю часу. Прийняті позначення: A — загальний виробіток, N — продуктивність праці, t — час роботи.

Щоб знайти загальний виробіток, потрібно продуктивність праці помножити на час роботи: $A = N \cdot t$.

Щоб знайти продуктивність праці, потрібно загальний виробіток поділити на час роботи: $N = A : t = \dfrac{A}{t}$.

Щоб знайти час роботи, потрібно загальний виробіток поділити на продуктивність праці: $t = A : N = \dfrac{A}{N}$.

Методику організації навчальної діяльності учнів на уроках математики див. за посиланням.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Державний стандарт початкової освіти, затверджений постановою КМУ від 21 лютого 2018 р. № 87. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennya-derzhavnogo-standartu-pochatkovoyi-osviti
2. Типові освітні програми для 3–4 класів закладів загальної середньої освіти, затверджені наказом Міністерства освіти і науки України від 08.10.2019 р. № 1273. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-tipovih-osvitnih-program-dlya-3-4-klasiv-zakladiv-zagalnoyi-serednoyi-osviti-1273
3. Психологічна діагностика особливостей когнітивного розвитку молодших школярів в умовах інформаційного суспільства : [монографія] / С. А. Гончаренко, А. Й. Ваврик, Є. П. Верещак [та ін.] ; за ред. С. А. Гончаренко, Л. О. Кондратенко. — К.-Кіровоград : ІмексЛТД, 2014. — 228 с.
4. *Кондратенко Л.* Шкільні проблеми дітей інформаційної ери / Л. Кондратенко, Л. Манилова [Електронний ресурс]. Режим доступу: www.pulib.sk/web/kniznica/.../Kondratenko_Manylov a.pdf
5. *Скворцова С. О.* Методична система навчання розв'язування сюжетних задач учнів початкових класів: монографія / С. О. Скворцова. — Одеса : Астропринт, 2006. — 696 с.

Докладніше див. за посиланням.

ЗМІСТ

Навчальне видання

СКВОРЦОВА Світлана Олексіївна
ОНОПРІЄНКО Оксана Володимирівна

Навчально-методичний посібник
«Нова українська школа: методика навчання математики у 3–4 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів»

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *І. Л. Морєва*
Технічний редактор *А. В. Пліско*
Коректор *Н. В. Красна*

Підписано до друку 01.12.2020. Формат 60×90/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 20,00. Обл.-вид. арк. 21,9.
Тираж 60 734 прим. Зам. № 8810-2020.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Навчально-методичний посібник
надруковано на папері українського виробництва

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 712-20-00. E-mail: sale@triada.kharkov.ua

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА: МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У 3–4 КЛАСАХ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ НА ЗАСАДАХ ІНТЕГРАТИВНОГО І КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДІВ

- Методика навчання нумерації багатоцифрових чисел та арифметичних дій із числами
- Методика навчання розв’язування задач
- Методика алгебраїчної пропедевтики
- Методика геометричної пропедевтики
- Методика навчання основних величин

Видання супроводжується інтернет-підтримкою, яка містить:

- методичні рекомендації щодо вивчення окремих тем;
- очікувані результати й орієнтовний зміст навчання;
- приклади завдань.

ISBN 978-617-09-6795-4
9 786170 967954
24433600